Laver 強制法と Hausdorff 測度

後藤 達哉 (神戸大学)

2024 年 8 月 8 日

第 2 回 若手による数理論理学研究集会 (神奈川大学横浜キャンパスにて)

Goldstern の原理

次の原理を Goldstern の原理という.

任意の Lebesgue 測度0の集合の族$(A_x : x \in \omega^\omega)$について，もしこれが条件$x \leqslant x' \Rightarrow A_x \subseteq A_{x'}$を満たすのであれば，和集合$\bigcup_{x \in \omega^\omega} A_x$も Lebesgue 測度$0$である.

Goldstern の原理は ZFC から独立である (G., 2022).

寄り道： Goldstern の原理のポイントクラス制限バージョン

Goldstern の原理において仮定$\{(x,y)\in\omega^\omega\times\mathbb{R} : y\in A_x\}\in\mathbf{\Sigma}^1_1$を加えたバージョンは ZFC の定理 (1993, Goldstern).

Goldstern の原理において仮定$\{(x,y)\in\omega^\omega\times\mathbb{R} : y\in A_x\}\in\mathbf{\Pi}^1_1$を加えたバージョンは ZFC の定理 (2024, G.).

Goldstern の原理の独立性

Goldstern の原理の否定は連続体仮説から導出される．よって，
Goldstern の原理の否定は無矛盾.

Goldstern の原理は Laver モデルという，Laver 強制法の反復により得られるモデルで成り立っている． よって，Goldstern の原理は無矛盾.

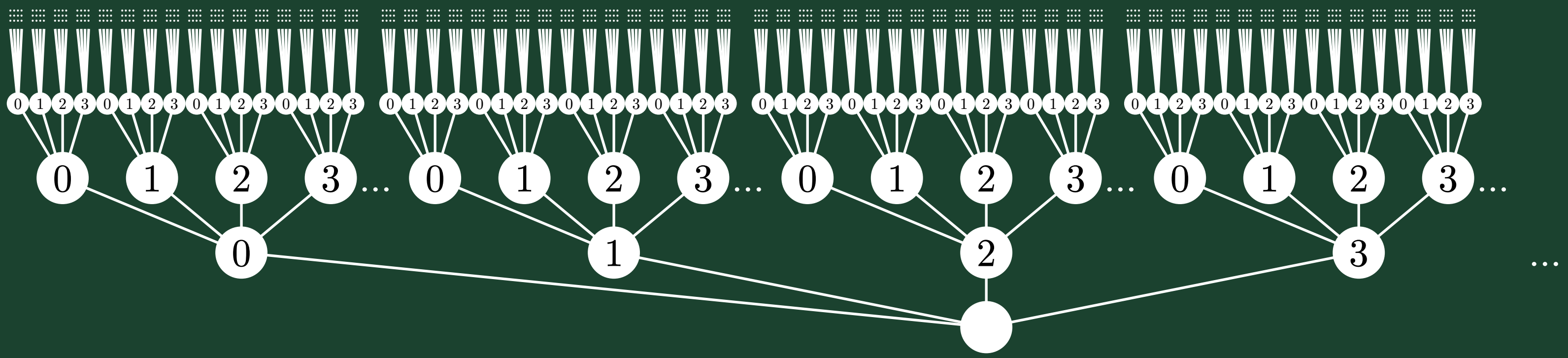
Laver 強制法$\mathbb{L}$

$T \in \mathbb{L}$であるのは次のとき：Tが$\omega^{<\omega}$の部分木であり，その幹 $\mathrm{stem}(T)$以上のすべてのノードについて，子ノードが無限個ある

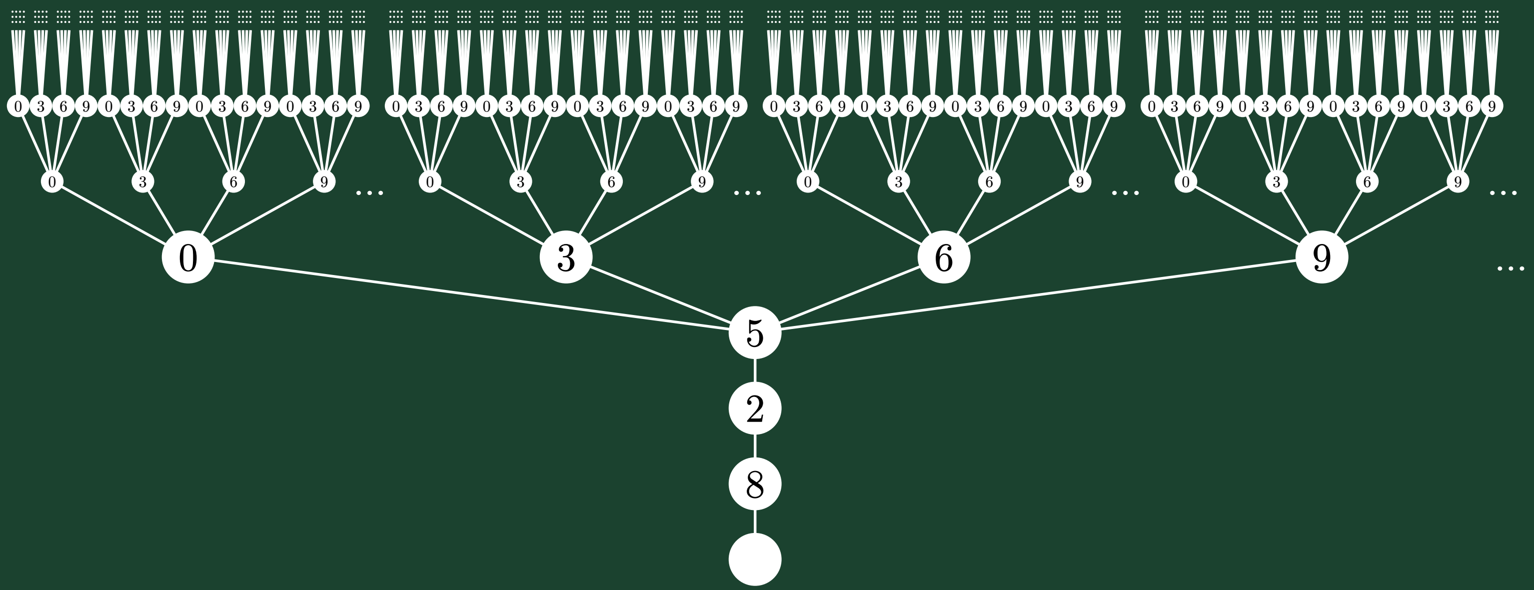
幹$\mathrm{stem}(T)$とは子ノードを複数持つノードのうち最小のものを指す．

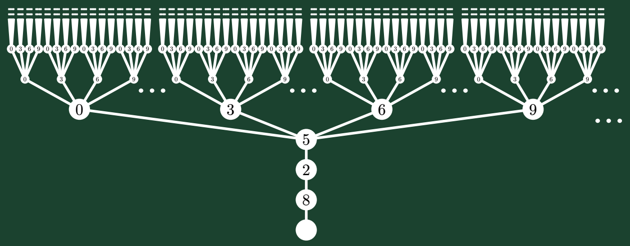
$\mathbb{L}$の順序：$T' \leqslant T$であるのは$T' \subseteq T$のとき．

次のような木は$\mathbb{L}$に属する．しかもこれは$\mathbb{L}$の最大元である．（無限分岐は現実に描けないので4分岐までしか描いていない！）



次のような木も$\mathbb{L}$に属する.





命題 Laver 強制法は新しい自然数列$\ell \in \omega^\omega$であって，基底モデルに存在する全てのω^ωの元xを圧するものを追加する．

ここでℓがxを圧するとは，ある$n_0 \in \omega$が存在して，すべての$n \geqslant n_0$について$x(n) \leqslant \ell(n)$となること．

証明のポイント：基底モデルの$x \in \omega^\omega$と$T \in \mathbb{L}$が与えられたとき，Tを縮めて新しい$\mathbb{L}$の元T'を作って，T'の十分大きなレベルnのラベルはすべて$x(n)$より大きいようにできる．

定理 (Woodin, Judah-Shelah) Laver 強制法は Lebesgue 外測度を保つ． すなわち$A \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$かつ$a = \mu^*(A)$ならば$\mathbb{L} \Vdash a = \mu^*(A)$である．

定理 (Woodin, Judah-Shelah) Laver 強制法の可算台反復も Lebesgue 外測度を保つ．

なお，Pawlikowski はこれらの証明を簡潔にした．

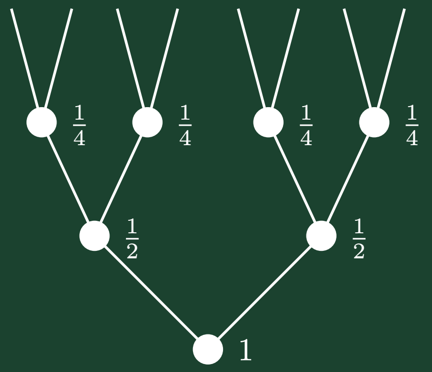
この定理と先ほどの命題は，Goldstern の原理が Laver モデルで成り立つことを示すときの大きな鍵となる．

Lebesgue 外測度以外の外測度はどうか？

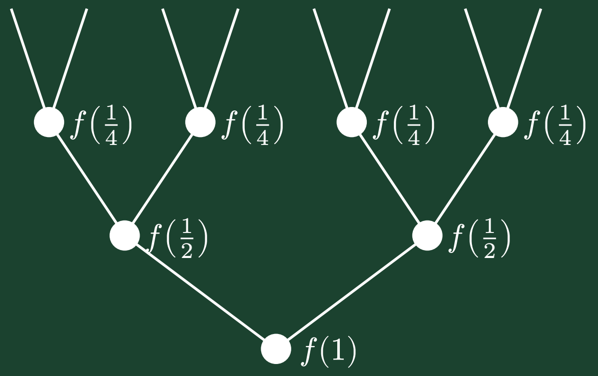
Goldstern の原理の Lebesgue 外測度以外の外測度でのバージョンが無矛盾か気になる.

特に Lebesgue 測度より細かい測度である Hausdorff 測度ではどうだろう？ (Hausdorff 測度はゲージ関数というパラメータを伴い, それを変えるごとに測度が定まる)

Lebesgue 測度



ゲージ関数fに関する Hausdorff 測度



例．$A = \{x \in 2^\omega : (\forall n) x(2n) = 0\}$と$B = \{x \in 2^\omega : (\forall n) x(3n) = 0\}$だと$A$の方が大きい集合であると測れて欲しいが Lebesgue 測度は両方0．ゲージ関数$x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$や$x \mapsto (x)^{\frac{2}{3}}$でそれぞれ測ると両者の大きさを区別できる．

定理 (G.) 任意のゲージ関数fについて，Laver 強制法はf-Hausdorff 外測度を保つ.

問題 A 任意のゲージ関数fについて，Laver 強制法の可算台反復もf-Hausdorff 外測度を保つか？

問題 B Hausdorff 測度に関する Goldstern の原理は無矛盾か？

なお，ここで考えている Hausdorff 測度は Cantor 空間に標準的な距離を入れたものについてのみ考えている. 問題 A が正しければ問題 B も正しい.

参考文献

1. Goldstern, M. An Application of Shoenfield's Absoluteness Theorem to the Theory of Uniform Distribution. Monatshefte für Mathematik **116,** 237–244 (1993)

2. Goto, T. Goldstern's principle about unions of null sets. https://arxiv.org/abs/2206.08147 (2022)

3. Judah, H. I. & Shelah, S. The Kunen-Miller chart (Lebesgue measure, the Baire property, Laver reals and preservation theorems for forcing). J. Symbolic Logic **55,** 909–927 (1990)

4. Pawlikowski, J. Laver’s forcing and outer measure, Set theory (Boise, ID, 1992–1994), 71–76. Contemp. Math **192,** (1996)