部分関数を全域関数で覆うことに関するEngelking-Karłowiczの定理の一般化

後藤 達哉
神戸大学システム情報学研究科 博士後期課程 2 年

2023 年 12 月 8 日

数学基礎論若手の会 2023 @ サンセットブリーズ保田

本研究は JSPS 科研費 JP22J20021 の助成を受けたものである

目次

目次

集合の濃度

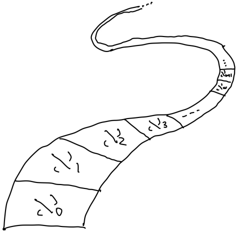
集合論は無限集合について様々な研究する分野である．
特に無限集合の「要素の個数」に興味がある．

- 集合 X, Y について $|X| \leqslant |Y| \iff X$ から Y への単射がある．
- 集合 X, Y について $|X| = |Y| \iff X$ から Y への全単射がある．

集合 X に対して本当に $|X|$ という「モノ」(集合) を定めることができて，その意味での上の同値も成り立つ．
$|X|$ のことを X の**濃度**という．集合の濃度として表されるモノを**基数**という．

アレフ系列

- 基数たちは整列されている：基数のなす，空でない任意の集合 X についてその最小元 $\min X$ が存在する．
- Cantor の定理：任意の集合 X について $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.



そこで「番号」α について α 番目の無限基数 $\aleph_\alpha$ が定められる：

- $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.
- $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ (つまり $\aleph_\alpha$ の一個次の基数).
- $\aleph_\gamma = \sup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha$ (γ は極限の「番号」).

一般連続体仮説

すべての無限集合 X について次が成り立つという仮説を「一般連続体仮説」という：$|X|^+ = |\mathcal{P}(X)|$. 一般連続体仮説は通常の集合論の公理系 ZFC から証明も反証もできない．

基数の足し算・掛け算

基数の足し算・掛け算は次のように定義される：

- 互いに素な二つの集合 X, Y について
  $|X| + |Y| := |X \cup Y|$.
- 二つの集合 X, Y について
  $|X| \cdot |Y| := |X \times Y|$.

実は次が成り立つ：無限集合 X, Y について

$$|X| + |Y| = |X| \cdot |Y| = \max\{|X|, |Y|\}.$$

$\rightsquigarrow$ 無限基数の足し算・掛け算はあまり興味深くはない.

基数の指数関数

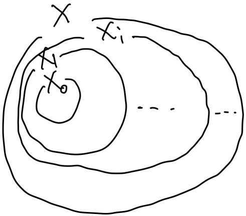
他方で，基数の指数関数は興味深い．
集合 X, Y について

$$|Y|^{|X|} := |\{f : f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への関数}\}|.$$

[余談] なぜ興味深いか？強制法の観点から，基数の指数関数にはほぼ証明できる性質がなさそうに見えるが，Silver の定理や PCF 理論などの証明できる非自明な性質もあるから．

正則基数

集合 X について，ある集合 I と X の部分集合列 $\langle X_i : i \in I \rangle$ が存在して，$|I| < |X|$ かつ $|X_i| < |X|$ がすべての $i \in I$ で成り立ち，かつ $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ を満たすとき，$|X|$ は**特異基数**であるという．



特異基数でない基数を**正則基数**という．

- $\aleph_0$ は正則基数 (有限集合の有限和は有限だから！)
- $\aleph_1$ は正則基数 (可算集合の可算和は可算だから！)
- 任意の基数 κ に対して κ^+ は正則基数
- $\aleph_\omega$ は特異基数

共終数

集合 X について，次の条件を満たす集合 I の濃度の最小を $|X|$ の**共終数**といい，$\mathrm{cf}(|X|)$ と書く：X の部分集合列 $\langle X_i : i \in I \rangle$ が存在して，$|X_i| < |X|$ がすべての $i \in I$ で成り立ち，かつ $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ を満たす．

常に $\mathrm{cf}(|X|) \leqslant |X|$ であること，そして，$\mathrm{cf}(|X|) = |X|$ は $|X|$ が正則基数なことと同値であることに注意．

基数の $<\kappa$ 乗

基数 λ, κ に対して，

$$\lambda^{<\kappa} = \sup_{\mu<\kappa} \lambda^{\mu}$$

と定める．

基数の対数関数

あまり一般的ではない概念だが，基数の対数関数を次で定める．

$$\log\kappa = \min\{\lambda \text{ 基数} : 2^\lambda \geqslant \kappa\}.$$

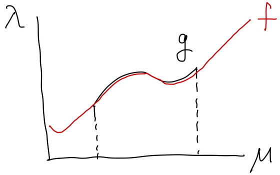
(実数の通常の対数関数と違って，一般には $2^{\log\kappa} = \kappa$ も $\log(2^\kappa) = \kappa$ も成立しないことに注意)．

目次

Engelking-Karłowicz 数の定義

μ, κ を $\kappa \leqslant \mu$ なる無限基数，λ を 2 以上の基数とする．

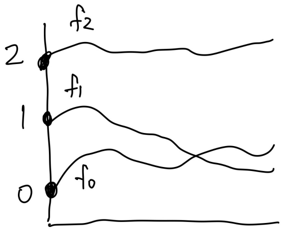
ek$(\mu, \lambda, \kappa) = \min\{|F| : F$ は μ から λ への (全域) 関数の集合で次の条件を満たす：任意の μ から λ への部分関数 g で定義域の濃度が κ 未満のものに対して，ある $f \in F$ があって，f は g の延長である $\}$



明らかな下界

常に $\lambda \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ である．

$\because$ $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ の条件を満たす関数の集合 F を取る．このとき各 $\alpha < \lambda$ に対して $g_\alpha \colon \{0\} \to \lambda; g(0) = \alpha$ という関数を考える．F の取り方から g_α を延長する $f_\alpha \in F$ が取れる．各 f_α は異なっていなければならない！よって $\lambda \leqslant |F|$.



Engelking-Karłowicz の定理

μ, κ を $\kappa \leqslant \mu$ なる無限基数，λ を 2 以上の基数とする．加えて，$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ かつ $\mu \leqslant 2^\lambda$ を仮定する．このとき $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) = \lambda$ である．

我々は，仮定「$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ かつ $\mu \leqslant 2^\lambda$」を外したときに **ek** がどう振る舞うかを見たい！

[余談] この定理は組合せ論的な有用な補題として最近の論文 “Cichoń’s maximum” でも使われている．

Engelking-Karłowicz 数に関して発表者が示したこと

定理 (G.)

- 常に $\lambda^{<\kappa} \cdot \log \mu \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) \leqslant (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.
- ある μ, λ, κ について $\lambda^{<\kappa} \cdot \log \mu \neq \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ となることが無矛盾.
- 特異基数仮説を仮定すると，常に $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) = (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.

疑問

特異基数仮説を仮定しなくても，常に $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) = (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$ か？

余談：$\mathbf{ek}((2^{\aleph_0})^+, 2, \aleph_0)$

[余談] Engelking-Karłowicz の定理の仮定が成り立っていない例として，$\mathbf{ek}((2^{\aleph_0})^+, 2, \aleph_0)$ が考えられる．これは上記定理 (G.) の第一項目から $\log((2^{\aleph_0})^+)$ だと分かる．
研究の当初，$\aleph_1 \leqslant \mathbf{ek}((2^{\aleph_0})^+, 2, \aleph_0) \leqslant 2^{\aleph_0}$ が分かっていて，$\log((2^{\aleph_0})^+)$ と等しいことは分かっていなかった．だから発表者は当初「基数不変量チャンスなのでは？」と思っていた．

目次

命題 A (1/2)

命題 A $\log\mu \leqslant \mathbf{ek}(\mu,\lambda,\kappa)$.

- $\nu < \log\mu$ となる基数 ν を任意にとる．
- このとき $\nu < \mathbf{ek}(\mu,\lambda,\kappa)$ を示せば良い．
- $\log\mu \leqslant \lambda$ なら証明は終わるので，$\lambda < \log\mu$ を仮定してよい．
- μ から λ への関数の集合 F で濃度 ν のものを任意にとる．F の元で覆えない部分関数を作ればよい．
- $F = \{f_\alpha : \alpha < \nu\}$ と並べる．ここに $f_\alpha \colon \mu \to \lambda$.
- 各 $\beta < \mu$ について $h_\beta \colon \nu \to \lambda$ を $h_\beta(\alpha) = f_\alpha(\beta)$ と定める．

命題 A (2/2)

命題 A $\log \mu \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$.

- $\lambda, \nu < \log \mu$ なので，log の定義より $2^\lambda, 2^\nu < \mu$ に注意．
- よって $\lambda^\nu \leqslant 2^{\lambda \cdot \nu} < \mu$ である．
- したがって鳩の巣原理により，互いに異なる $\beta, \beta' < \mu$ があって，$h_\beta = h_{\beta'}$ である．
- $g : \{\beta, \beta'\} \to \lambda$ を $g(\beta) = 0, g(\beta') = 1$ と定める．
- g はどの $f \in F$ によっても延長されない．

$\square$

命題B (1/2)

命題B $\lambda^{<\kappa} \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$.

- $\kappa = \aleph_0$ で λ が無限のとき，$\lambda^{<\aleph_0} = \lambda$ なので命題は明らか．
- $\kappa = \aleph_0$ で λ が有限のとき，$\lambda^{<\aleph_0} = \aleph_0$ であり，右辺 $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ は明らかに無限なので良い．
- 次に κ が後続基数の場合を示す．$\kappa = \theta^+$ とする．$F \subseteq {}^{\mu}\lambda$ が濃度 $\lambda^{<\kappa}$ 未満であるとする．すると

$$|\{f \restriction \theta : f \in F\}| \leqslant |F| < \lambda^{<\kappa} = \lambda^{\theta}.$$

したがって，$g \colon \theta \to \lambda$ が存在して，g はどの $f \restriction \theta$ $(f \in F)$ とも異なる．よって，F は $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ の witness ではない．

命題 B (2/2)

命題 B $\lambda^{<\kappa} \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$.

- 最後に κ が極限基数の場合を示す．この場合は

$$\begin{aligned}\lambda^{<\kappa} &= \sup\{\lambda^\theta : \theta < \kappa\} \\ &\leqslant \sup\{\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+) : \theta < \kappa\} \\ &\leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)\end{aligned}$$

となるので，成り立つ． □

以上より，定理の下界を示せた．

命題 C (1/3)

命題 C $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) \leqslant (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.

この証明は Engelking-Karłowicz の定理の証明の一般化であり，その定理の Shelah と Rinot による改良をもとにしている．

- $\theta = \log \mu$ とおく．
- 集合 W を次で定義：

$$\begin{aligned} W = \{(a, \mathcal{A}, h) : & a \subseteq \theta, |a| < \kappa, \\ & \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(a), |\mathcal{A}| < \kappa, h \colon \mathcal{A} \to \lambda\} \end{aligned}$$

- $|W| = (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$ である．
- $\mu \leqslant 2^\theta$ より列 $\langle B_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ で θ の互いに異なる部分集合からなるものがとれる．

命題 C (2/3)

命題 C $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) \leqslant (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.

- W の元を $\langle (a_i, \mathcal{A}_i, h_i) : i < |W| \rangle$ と並べる．
- $i < |W|$ について $f_i : \mu \to \lambda$ を

$$f_i(\alpha) = \begin{cases} h_i(a_i \cap B_\alpha) & (\text{if } a_i \cap B_\alpha \in \mathcal{A}_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

  と定める．
- $F = \{f_i : i < |W|\}$ が $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ の witness となることを示そう．

命題 C (3/3)

命題 C $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) \leqslant (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.

- $g : \mu \rightharpoonup \lambda$ を定義域の濃度が κ 未満の部分関数として X をその定義域とする．
- 各 $\alpha \neq \beta$ in X について $x(\alpha, \beta) \in B_\alpha \triangle B_\beta$ をとる．
- $a := \{x(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in X, \alpha \neq \beta\}$ とおく．
- $\mathcal{A} := \{a \cap B_\alpha : \alpha \in X\}$ とおく．
- $h : \mathcal{A} \to \lambda$ を $h(a \cap B_\alpha) = g(\alpha)$ で定義 ($\alpha \neq \beta$ ならば $a \cap B_\alpha \neq a \cap B_\alpha$ に注意！)．
- $(a, \mathcal{A}, h) \in W$ なので，$i < |W|$ があり，$(a, \mathcal{A}, h) = (a_i, \mathcal{A}_i, h_i)$ となる．
- このとき f_i は g の延長． □

命題 D

命題 D $\mathrm{cf}(\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^{+})) > \theta$.

証明は省略！

命題 E

命題 E ある μ, λ, κ について
$\lambda^{<\kappa} \cdot \log \mu \neq \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ となることが無矛盾．

- 一般連続体仮説のもとで
  $\mu = \aleph_\omega, \lambda = 2, \kappa = \aleph_1$ を考える．
- このとき $\lambda^{<\kappa} \cdot \log \mu$ は $\aleph_\omega$ である．
- $\aleph_\omega$ の共終数は ω だが，他方で，命題 D より，
  $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ の共終数は ω より真に大きい．
- よって $\lambda^{<\kappa} \cdot \log \mu \neq \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$． $\square$

命題 F (1/2)

命題 F 特異基数仮説を仮定すると，常に $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+) = (\lambda \cdot \log \mu)^\theta$.

- 特異基数仮説の仮定のもとで，次の基数冪の公式が成立することを思い出す：無限基数 α, β に対して，

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha & (\text{if } 2^\beta < \alpha \text{ and } \beta < \mathrm{cf}(\alpha)) \\ \alpha^+ & (\text{if } 2^\beta < \alpha \text{ and } \beta \geqslant \mathrm{cf}(\alpha)) \\ 2^\beta & (\text{if } 2^\beta \geqslant \alpha) \end{cases}$$

- $\alpha = \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+), \beta = \theta$ で公式を適用してみる．

命題 F (2/2)

命題 F 特異基数仮説を仮定すると，常に $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+) = (\lambda \cdot \log \mu)^\theta$.

- すでに示したことより $2^\beta \leqslant \alpha$ かつ $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ である．よって公式の 1 つ目のケースか 3 つ目のケースが当てはまるが，どちらにせよ，$\alpha^\beta = \alpha$.
- よって，$\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+)^\theta = \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+)$.
- ところで，すでに示した ek の下界 $\lambda^\theta \cdot \log \mu \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+)$ がある．
- この両辺を θ 乗すると，$(\lambda \cdot \log \mu)^\theta \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+)^\theta = \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^+)$ となる． □

命題 G

命題 G すべての後続基数 κ で $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) = (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$ が成り立っていれば，すべての無限基数 κ でも同じ等式が成り立つ．

- κ を極限基数とする．このとき

$$
\begin{aligned}
(\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa} &= \sup_{\theta<\kappa} (\lambda \cdot \log \mu)^{\theta} \\
&= \sup_{\theta<\kappa} \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \theta^{+}) \\
&\leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)
\end{aligned}
$$

となるのでよい．最後は ek の単調性を使った． $\square$

定理の証明

定理 特異基数仮説を仮定すると，常に $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) = (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.

- 命題 F, G より従う．$\square$

まとめ

定理 (G.) (再掲)

- 常に $\lambda^{<\kappa} \cdot \log \mu \leqslant \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) \leqslant (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.
- ある μ, λ, κ について $\lambda^{<\kappa} \cdot \log \mu \neq \mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa)$ となることが無矛盾.
- 特異基数仮説を仮定すると，常に $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) = (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$.

疑問 (再掲)

特異基数仮説を仮定しなくても，常に $\mathbf{ek}(\mu, \lambda, \kappa) = (\lambda \cdot \log \mu)^{<\kappa}$ か？

今後の展望

特異基数仮説が破れているモデルの代表例である，Prikry モデルで上記等式がどうなっているか？
もし破れていれば面白いなあと思っている．

参考文献

[EK65] Ryszard Engelking and Monika Karłowicz. "Some theorems of set theory and their topological consequences". In: *Fundamenta Mathematicae* 57.3 (1965), pp. 275–285.

[Rin12] Assaf Rinot. *The Engelking-Karlowicz theorem, and a useful corollary*. https://blog.assafrinot.com/?p=2054. Accessed: Oct. 26th, 2023. 2012.