ハウスドルフ測度に関する基数不変量

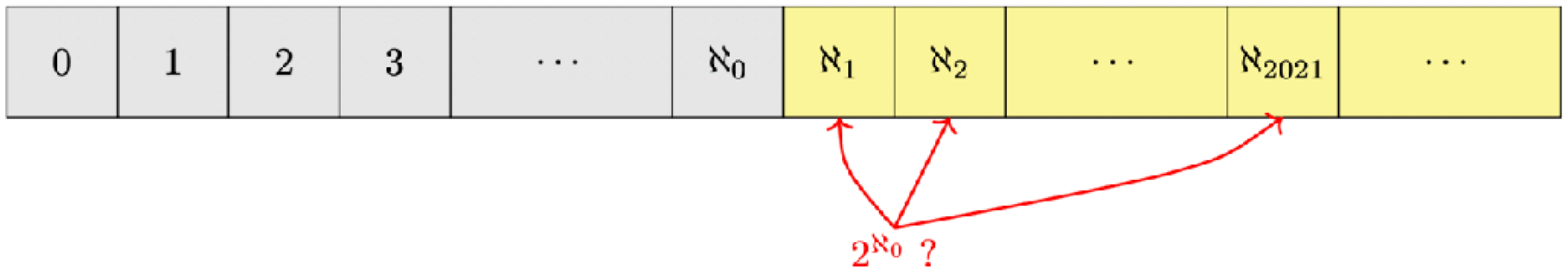
名古屋大学情報学研究科 M1 後藤 達哉

2021年3月27日 数学基礎論若手の会

Part 1
予備知識
(基数不変量とハウスドルフ測度)

連続体問題とは

- カントールは連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ が可算濃度 $\aleph_0$ より真に大きいことを示した (1873)．さらに彼は $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ かどうかを尋ねた (1878)
- ゲーデルは $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ のZFCからの無矛盾性を示した (1940)
- コーエンは強制法を編み出し $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ のZFCからの無矛盾性を示した (1963)．$2^{\aleph_0}$ は $\aleph_2$ や $\aleph_{2021}$ など色々な値になりうる



基数不変量とは

- 集合論では $\aleph_1$ 以上 $2^{\aleph_0}$ 以下の様々な定義可能な基数がある．それらを基数不変量という
- 基数不変量の間のZFCで証明できる不等式を調べたり，2つの基数不変量が一般には異なっていることを証明したりして，無限の世界の構造を調べる
- 連続体仮説の下では全部潰れるので考える価値のない問題だが，コーエンの仕事 (連続体仮説の否定の無矛盾性)のおかげで，考える価値がある！

チホンの図式

- 代表的な基数不変量とその間のZFCで示せる不等号は次のチホンの図にまとめられている：

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{cov}(\mathrm{null}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{null}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
& & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathrm{null}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathrm{null}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

チホンの図式

自然数から自然数へ
の関数をすべて支配するのに必要な
関数の最小個数

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathrm{null}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{null}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathrm{null}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathrm{null}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

ルベーグ測度 0 集
合で全体 $\mathbb{R}$ をカバーするのに必要
な最小個数

ベール第一類集合で
全体 $\mathbb{R}$ をカバーするのに必要な最
小個数

チホンの図式

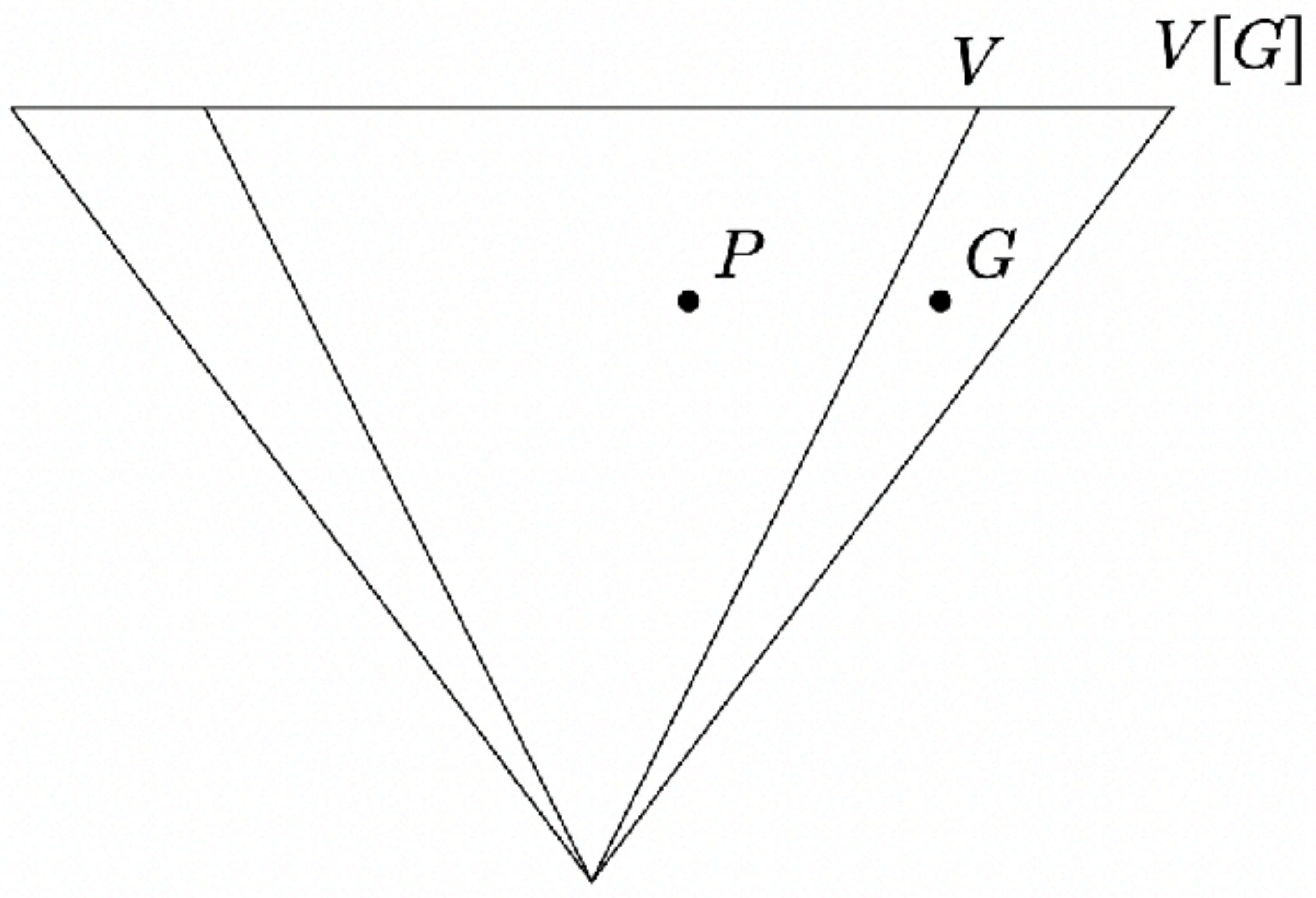
ベール第一類でない ℝ
の部分集合の最小サイズ

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathrm{null}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{null}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathrm{null}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathrm{null}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

ルベーグ測度 0 でない ℝ の部分
集合の最小サイズ

強制法とは

- 半順序集合を与えて，それを設計図にして集合論のユニバースに新しい集合を添加してより大きいユニバースを作る方法
- しばしば与える半順序集合のことを強制法とも呼ぶ (コーエン強制法，ランダム強制法などなど…)
- 無矛盾性を示したい命題に合わせて半順序集合を定義して，実際にそれで拡大したユニバースでその命題が成り立っていることを示す
- 強制法は反復ができる



チホンの図式

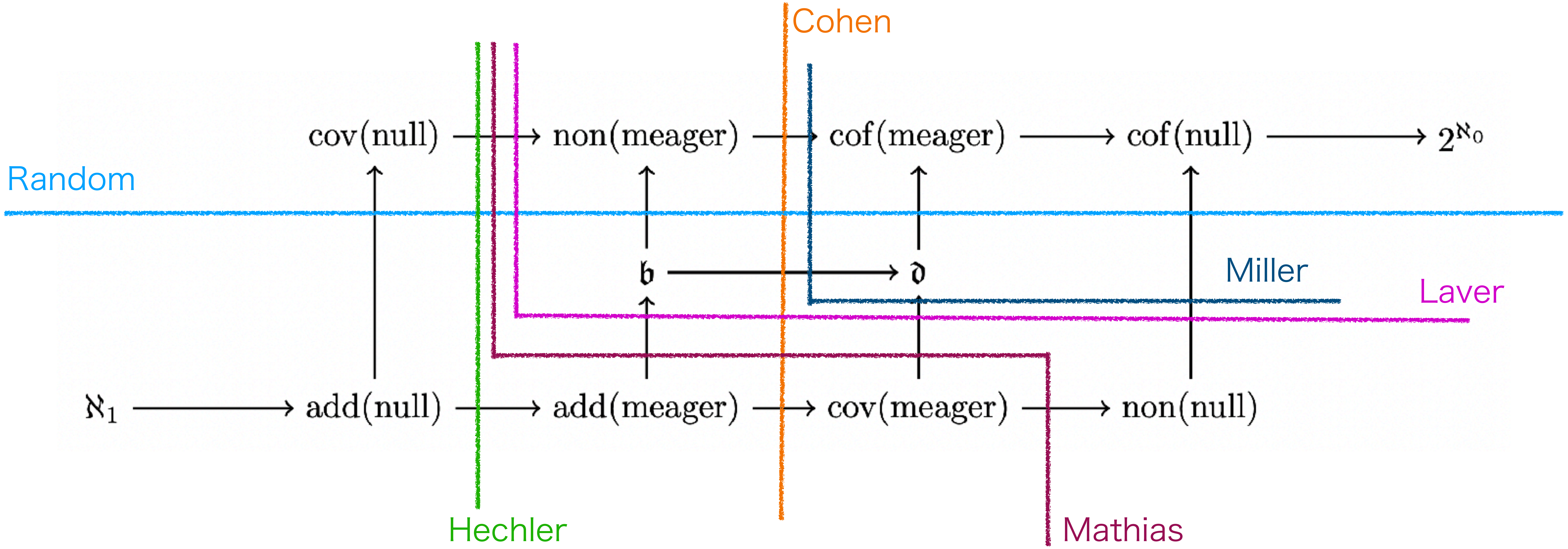
- コーエンのモデルは次の線で分離する

こっちは $\aleph_1$　　こっちは$2^{\aleph_0}$

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{cov}(\mathrm{null}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{null}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
& & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathrm{null}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathrm{meager}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathrm{meager}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathrm{null}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

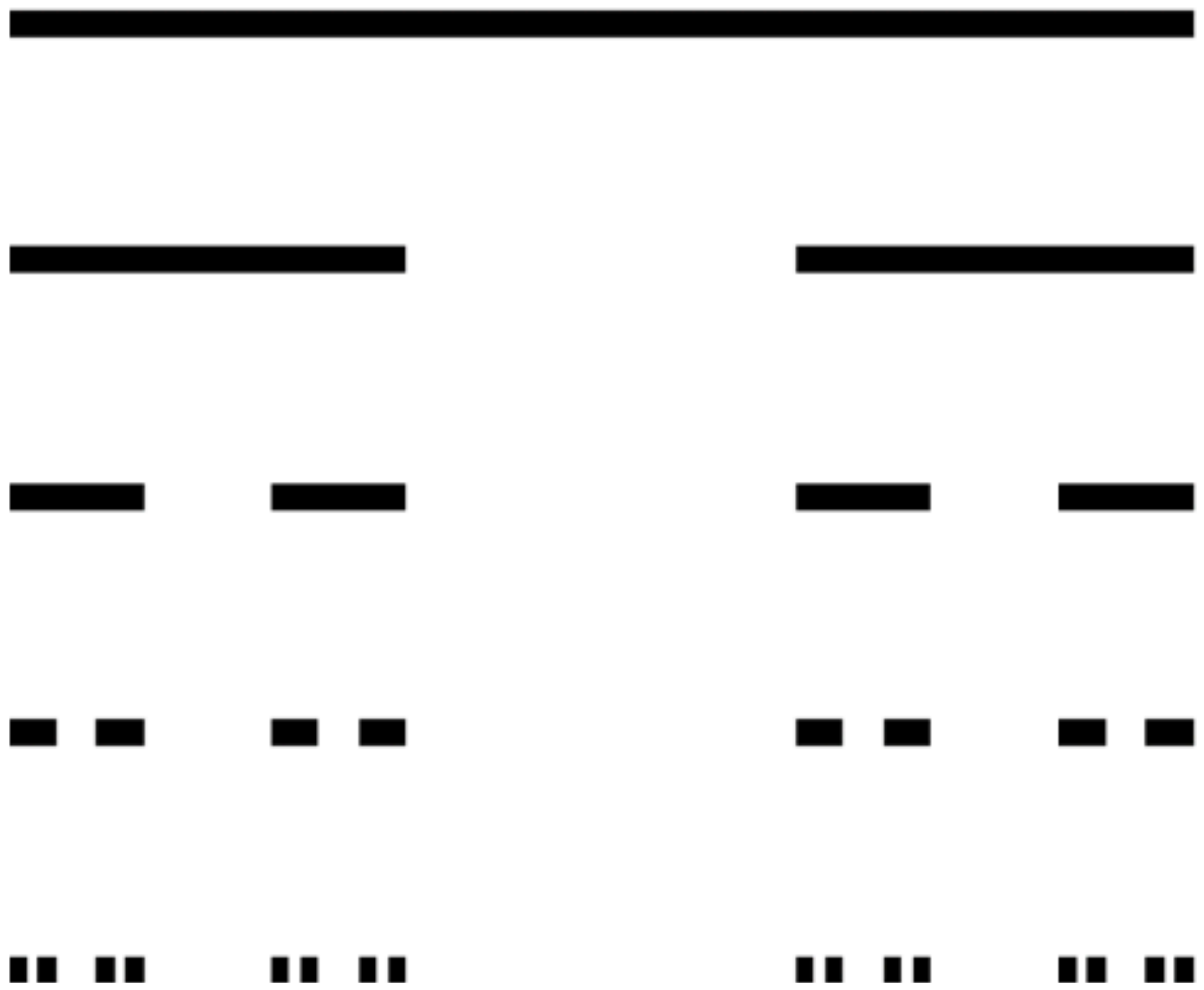
他の強制法では

- コーエン強制を含む他の強制法 (の反復)は次のような分離をする



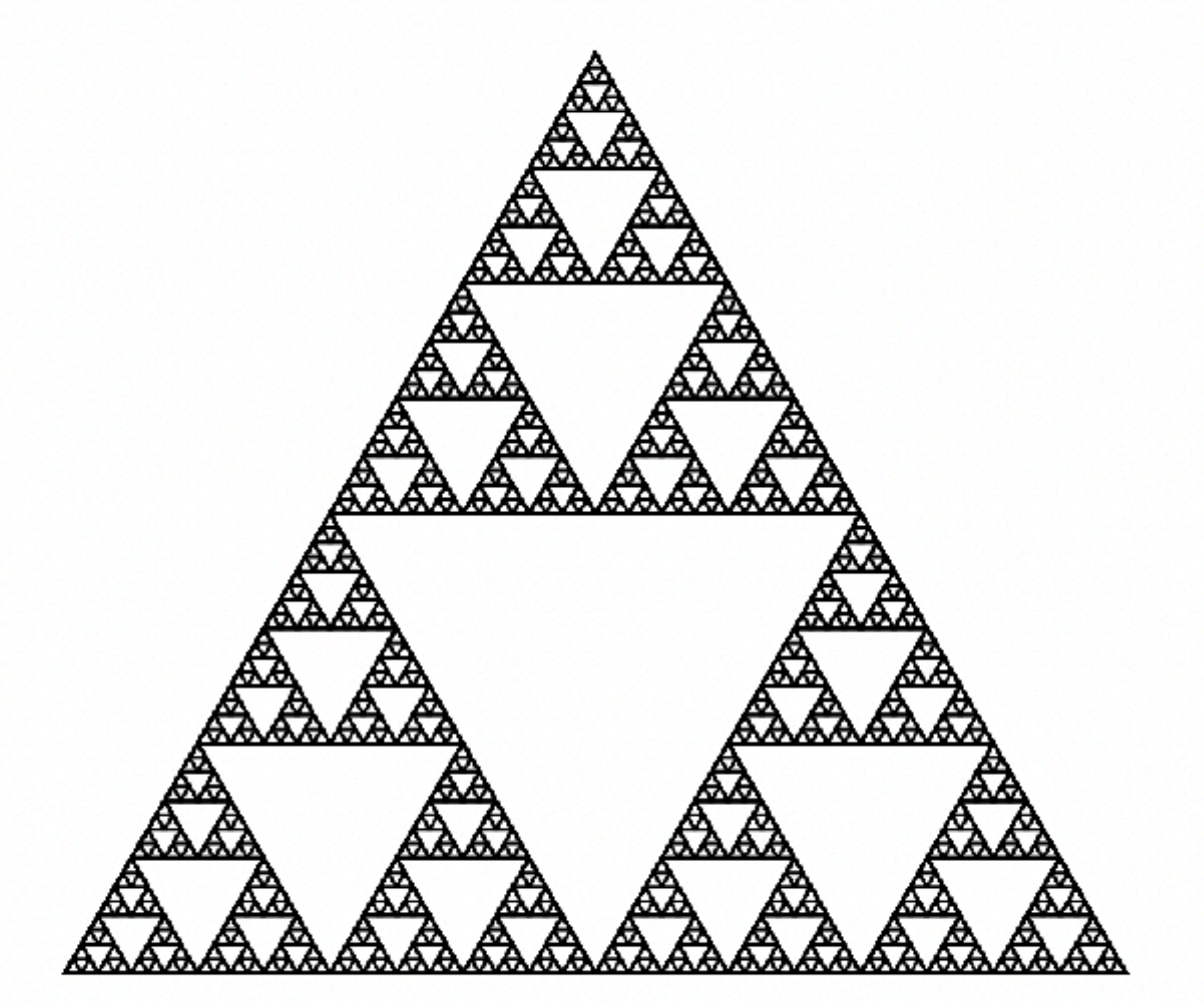
ハウスドルフ測度

- ハウスドルフ測度やハウスドルフ次元はルベーグ測度が 0 である集合をより細かく測るための重要な概念である



3 進カントール集合は

$\log 2/\log 3 = 0.63\ldots$のハウスドルフ次元を持つ



シェルピンスキーガスケットは

$\log 3/\log 2 = 1.58\ldots$のハウスドルフ次元を持つ

ハウスドルフ測度

- 距離空間 X の部分集合 A と $f : [0,\infty) \to [0,\infty), \delta > 0$ について A の f-ハウスドルフ測度の δ 近似とは

$$\mathscr{H}^f_\delta(A) = \inf\{\sum_{n\geq 0} f(\mathrm{diam}(C_n)) : A \subseteq \bigcup_n C_n \wedge \forall n\ (\mathrm{diam}\, C_n \leq \delta)\}$$

- 距離空間 X の部分集合 A と $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ について A の f-**ハウスドルフ測度**とは

$$\mathscr{H}^f(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}^f_\delta(A)$$

- 特に $s > 0$ について関数 $\mathrm{pow}_s(x) = x^s$ に関するハウスドルフ測度 $\mathscr{H}^{\mathrm{pow}_s}(A)$ を A の s 次元ハウスドルフ測度という

- $\dim_{\mathrm{H}}(A) = \sup\{s \in (0,\infty) : \mathscr{H}^{\mathrm{pow}_s}(A) = \infty\}$ を A の**ハウスドルフ次元**という

ハウスドルフ次元

- $\mathrm{HDZ}_X = \{A \subseteq X : \dim_{\mathrm{H}}(A) = 0\}$ とおく
- 特にカントール空間 2^ω の2つの異なる元に対して最初に食い違う番号を n として $d(x, y) = 2^{-n}$ で距離を入れて，$\mathrm{HDZ} = \mathrm{HDZ}_{2^\omega}$ とする
- また，$\mathcal{N}_f = \{A \subseteq 2^\omega : \mathscr{H}^f(A) = 0\}$ とおく
- $\mathrm{HDZ} = \bigcap_{s>0} \mathcal{N}_{\mathrm{pow}_s}$ に注意

ハウスドルフ測度0とstrong measure zero

- イデアル $\mathcal{N}_f$ は次を満たす：
  - $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{N}_f \subseteq \mathrm{null}$
  - $\mathcal{SN} = \bigcap_f \mathcal{N}_f$
- ここに $\mathcal{SN}$ は strong measure zero set と呼ばれるもののイデアル:

$$\mathcal{SN} = \{A \subseteq 2^\omega : \forall g \in \omega^\omega \ \exists \sigma \in \prod_n {}^{g(n)}2 \ (A \subseteq \bigcup_n [\sigma(n)])\}$$

依岡イデアル

- 一方で依岡イデアルと呼ばれるイデアル $\mathcal{I}_g$ ($g \in \omega^\omega$ は単調増加)も次を満たす：

  - $$\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{I}_g \subseteq \mathrm{null}, \quad \mathcal{SN} = \bigcap_g \mathcal{I}_g$$

- 定義は $\mathcal{I}_g = \{A : \exists h \gg g\ \exists \sigma \in \prod_n {}^{h(n)}2\ (A \subseteq [\sigma]_\infty)\}$

- ここに $h \gg g \iff \forall k \in \omega \forall^\infty n\ (h(n) \geq g(n^k))$,

  $[\sigma]_\infty = \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n\ (\sigma(n) \subseteq x)\}$

Part 2
ハウスドルフ測度に関する講演者の結果の紹介

ハウスドルフ測度0イデアルと依岡イデアル

- ハウスドルフ測度0イデアルと依岡イデアルの関係が気になる．講演者は次を示した

定理1 (G.)

- $\forall f\ \exists g\ (\mathcal{I}_g \subseteq \mathcal{N}_f)$
- $\forall g\ \exists f\ (\mathcal{N}_f \subseteq \mathcal{I}_g)$

- 依岡イデアルについてはパラメータの g が十分違えば $\mathrm{cov}(\mathcal{I}_g)$ 同士や $\mathrm{non}(\mathcal{I}_g)$ 同士を分離できることが知られている．そこで定理1よりハウスドルフ測度0イデアルについても同じことが言える

ハウスドルフ次元0イデアルの空間不変性

- 講演者はハウスドルフ次元0イデアル HDZ に関連づいた基数不変量

$$\mathrm{cov}(\mathrm{HDZ}) = \min\{\,|\mathscr{Y}| : \mathscr{Y} \subseteq \mathrm{HDZ} \land \bigcup \mathscr{Y} = 2^\omega\}$$

$$\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}) = \min\{\,|A| : A \subseteq 2^\omega \land A \notin \mathrm{HDZ}\}$$

を調べている

- まず，使う空間を 2^ω ではなくユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ に変えても変わらないことを示した

定理2 (G.)

正の自然数 d について

. $\mathrm{cov}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}^d}) = \mathrm{cov}(\mathrm{HDZ}), \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}^d}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ})$

定理2の証明

- non に関する主張だけ示す: $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}^d}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ})$
- 命題1

  $f : X \to Y$ をα-bi-Hölder写像とする.

  すなわち定数 $c_1, c_2 > 0$ があって

  $$c_1 d(x_1, x_2)^\alpha \leq d(f(x_1), f(x_2)) \leq c_2 d(x_1, x_2)^\alpha \text{ for all } x_1, x_2 \in X$$

  だとする. このとき

  $$\dim_H f(A) = (1/\alpha)\dim_H A$$

定理2の証明

- まず次を示す: $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]}) \leq \mathrm{non}(\mathrm{HDZ})$

- ハウスドルフ次元正な $A \subseteq 2^\omega$ に対してハウスドルフ次元正な $B \subseteq [0,1]$ であって $|B| \leq |A|$ なものを構成すればよい

- $f : 2^\omega \to [0,1]; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x(n)}{3}$ という写像は$(\log 3/\log 2)$-bi-Hölderなので$A \subseteq 2^\omega$がハウスドルフ次元正なら $f(A)$ もハウスドルフ次元正である．よってOK

定理2の証明

- 続いて次を示す: $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}) \leq \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]})$

- ハウスドルフ次元正な $A \subseteq [0,1]$ に対してハウスドルフ次元正な $B \subseteq 2^\omega$ であって $|B| \leq |A|$ なものを構成すればよい

- $f : [0,1] \to 2^\omega$ を2進小数展開するという写像とする．$B = f(A)$とすればよい

- f 自体は連続ですらないが，$g : 2^\omega \to [0,1]; x \mapsto \sum_n \frac{x(n)}{2^n}$ という写像が$g \circ f = \mathrm{id}_{[0,1]}$ を満たし，g はリプシッツである

- もし B がハウスドルフ次元0なら$A = g(B)$もハウスドルフ次元0となり矛盾．よってOK

定理2の証明

- よって $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ})$．ここで$\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}})$ を示す
- これは $\mathbb{R} = \bigcup_{n} [-n, n]$ に注意すればわかる

定理2の証明

- 続いて次を示す: $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{2^\omega \times 2^\omega})$
- これは $f : 2^\omega \to 2^\omega \times 2^\omega; x \mapsto (y, z)$ where $y(n) = x(2n), z(n) = x(2n+1)$ が全単射かつ$(1/2)$-bi-HölderなのでOK

- さらに次を示す: $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]\times[0,1]}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{2^\omega \times 2^\omega})$
- これは $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{2^\omega})$ のときと同様の証明でできる

定理2の証明

- さらに $[0,1]$ と $\mathbb{R}$ のときと同様の議論で $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]\times[0,1]}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}})$ でわかる

- したがって，$\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{[0,1]\times[0,1]}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{2^\omega\times 2^\omega}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{2^\omega})$

- 2次元の場合を示したが一般の d 次元ユークリッド空間でも同様である　□

HDZのcov, nonの上界，下界

- またZFCで示せる cov(HDZ), non(HDZ) の上界，下界を次で与えた：

定理3 (G.)

$\mathcal{I}_{\mathrm{id}} \subsetneq \mathrm{HDZ} \subsetneq \mathrm{null}.$

よって$\mathrm{non}(\mathcal{I}_{\mathrm{id}}) \leq \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}) \leq \mathrm{non}(\mathrm{null}),\ \mathrm{cov}(\mathrm{null}) \leq \mathrm{cov}(\mathrm{HDZ}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{I}_{\mathrm{id}})$.

チホンの図式だとここにいる：

cov(HDZ)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathrm{null}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{meager}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathrm{null}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathrm{null}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathrm{meager}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathrm{null}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

non(HDZ)

定理3の証明

- $\mathrm{HDZ} \subseteq \mathrm{null}$ はルベーグ測度が 1 次元ハウスドルフ測度に一致することに注意すれば明らか
- null に入っているが HDZ に入っていない集合の例は

$$A = \{x \in 2^\omega : \forall n\ (x(2n) = 0)\}$$

- HDZ に入っているが $\mathscr{I}_{\mathrm{id}}$ に入っていない集合の例は

$$B = \{x \in 2^\omega : \forall n\ (x \upharpoonright [n^2, (n+1)^2)\ \text{is constant})\}$$

定理3の証明

- $\mathscr{I}_{\mathrm{id}} \subseteq \mathrm{HDZ}$ について．$A \in \mathscr{I}_{\mathrm{id}}$ を任意にとる
- すると$f \gg \mathrm{id}$と$\sigma \in \prod_n^{f(n)} 2$がとれて$A \subseteq [\sigma]_\infty$
- $s, \delta > 0$ を任意にとる
- $f \gg \mathrm{id}$ より$\forall^\infty n(f(n) \geq n^2)$であり一方で
  $\forall^\infty n(n^2 \geq \max\{n/s, \log_2(1/\delta)\})$
- よって n_0 がとれて
  $\forall n \geq n_0\ (f(n) \geq \max\{n/s, \log_2(1/\delta)\})$
- そこでstringの列 τ を n_0 以上では σ そのままかつ n_0 未満の番号の項は適当に定め
  $\forall n \in \omega\ (|\tau(n)| \geq \max\{n/s, \log_2(1/\delta)\})$となるようにする
- $\sum_n 2^{-|\tau(n)|s} \leq \sum_n 2^{-n} = 1$
- かつ $2^{-|\tau(n)|} \leq \delta$ かつ $A \subset \bigcup_n [\tau(n)]$
- よって$\mathscr{H}^{\mathrm{pow}_s}(A) \leq 1$ $\square$

真の不等号のZFC無矛盾性

- 定理3の不等号について真の不等号の無矛盾性については次を得た

定理4 (G.)

$\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}) < \mathrm{non}(\mathrm{null})$ はZFCから相対的に無矛盾

- 証明の方針：Mathias強制法の可算台反復を使う．これにより$\mathrm{non}(\mathrm{null})$が大きくなることはよく知られている．$\mathrm{non}(\mathrm{HDZ})$ が小さくあり続けることを示すのにLaverの性質というものを使う

真の不等号のZFC無矛盾性

- 定理4の双対については既存の定理を組み合わせるだけで無矛盾性が言える

定理 (Zapletalの定理の系)

cov(null) < cov(HDZ) はZFCから相対的に無矛盾

- あとはHDZと$\mathscr{I}_{\mathrm{id}}$の間を分離したい

予想 1

non($\mathscr{I}_{\mathrm{id}}$) < non(HDZ) と cov(HDZ) < cov($\mathscr{I}_{\mathrm{id}}$) はそれぞれZFCから相対的に無矛盾

Part 3
パッキング測度に関する講演者の考察の紹介

Null additive

- $X \subseteq 2^\omega$ がnull additiveであるとは，任意のルベーグ測度ゼロ集合 H について $X + H$ がまたルベーグ測度ゼロ集合となることをいう
- X がnull additiveであることは，任意の $g \in \omega^\omega$ 単調非減少についても列 φ が存在して次を満たすことと同値：

1. すべての $n \in \omega$ で $\varphi(n) \subseteq 2^{[g(n),g(n+1))}$
2. すべての $n \in \omega$ で $|\varphi(n)| \leq n$
3. すべての $x \in X$ について有限個の除いたすべての $n \in \omega$ で$x \restriction [g(n), g(n+1)) \in \varphi(n)$

パッキング測度

- 前ページの g を固定したときに得られる X 全体の集合を $\mathcal{N}\mathcal{A}_g$ と書く
- すると(null additive全体) = $\bigcap_g \mathcal{N}\mathcal{A}_g$ となる
- 一方で$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$に対し$f$-パッキング測度というものがあり，

  (null additive全体) = $\bigcap_f$ (f-パッキング測度0集合全体)

パッキング測度の定義

- 距離空間 X と$A \subseteq X, f : [0,\infty) \to [0,\infty),\ \delta > 0$ に対して
  $P^f_\delta(A) = \sup\{\sum_i f(\mathrm{diam}(B_i)) : \{B_i\}$は中心を$A$内に持ち半径が$\delta$以下の互いに素な球の高々可算な族$\}$
- とおき、$P^f_0(A) = \lim_{\delta \to 0} P^f_\delta(A)$ とおく
- $P^f(A) = \inf\{\sum_{i=0}^{\infty} P^f_0(A_i) : A \subseteq \bigcup_i A_i\}$ を A の**パッキング測度**という

パッキング測度

- 次を予想している

予想２

- $\forall f\ \exists g\ (\mathscr{N}\mathscr{A}_g \subseteq \mathscr{P}\mathscr{N}_f)$
- $\forall g\ \exists f\ (\mathscr{P}\mathscr{N}_f \subseteq \mathscr{N}\mathscr{A}_g)$

- ここに$\mathscr{P}\mathscr{N}_f = (f$-パッキング測度0集合全体$)$

パッキング測度

- 実は $\mathrm{cov}(\mathcal{NA}_g)$ と $\mathrm{non}(\mathcal{NA}_g)$ はその定義より，それぞれすでに知られている基数 $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\Delta g,\mathrm{id}}$ と $\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\Delta g,\mathrm{id}}$ (localization cardinal)に等しくなる (ここに $\Delta g(n) = 2^{g(n+1)-g(n)}$)

- よって十分離れた g に対する $\mathfrak{d}^{\mathrm{Lc}}_{\Delta g,\mathrm{id}}$ 同士，$\mathfrak{b}^{\mathrm{Lc}}_{\Delta g,\mathrm{id}}$ 同士が分離できればよい

- すると g と g' が十分離れていれば，$\mathrm{cov}(\mathcal{NA}_g)$ と $\mathrm{cov}(\mathcal{NA}_{g'})$ が分離でき，$\mathrm{non}(\mathcal{NA}_g)$ と $\mathrm{non}(\mathcal{NA}_{g'})$ が分離できる

- 予想2と組み合わせると， 十分離れている f 同士の f-パッキング測度0イデアルを分離できる

まとめ

- 定理1: $\forall f\ \exists g\ (\mathscr{I}_g \subseteq \mathscr{N}_f)$, $\forall g\ \exists f\ (\mathscr{N}_f \subseteq \mathscr{I}_g)$
- 定理2: $\mathrm{cov}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}^d}) = \mathrm{cov}(\mathrm{HDZ}), \mathrm{non}(\mathrm{HDZ}_{\mathbb{R}^d}) = \mathrm{non}(\mathrm{HDZ})$
- 定理3: $\mathscr{I}_{\mathrm{id}} \subsetneq \mathrm{HDZ} \subsetneq \mathrm{null}$
- 定理4: $\mathrm{non}(\mathrm{HDZ}) < \mathrm{non}(\mathrm{null})$ はZFCから相対的に無矛盾
- 予想1: $\mathrm{non}(\mathscr{I}_{\mathrm{id}}) < \mathrm{non}(\mathrm{HDZ})$ と $\mathrm{cov}(\mathrm{HDZ}) < \mathrm{cov}(\mathscr{I}_{\mathrm{id}})$ はそれぞれZFCから相対的に無矛盾
- 予想2: $\forall f\ \exists g\ (\mathscr{N}\mathscr{A}_g \subseteq \mathscr{P}\mathscr{N}_f)$, $\forall g\ \exists f\ (\mathscr{P}\mathscr{N}_f \subseteq \mathscr{N}\mathscr{A}_g)$

参考文献

1. Blass, Andreas. "Combinatorial cardinal characteristics of the continuum." Handbook of set theory. Springer, Dordrecht, 2010. 395-489.

2. Cardona, Miguel A., and Diego A. Mejía. "On cardinal characteristics of Yorioka ideals." Mathematical Logic Quarterly 65.2 (2019): 170-199.

3. Zapletal, Jindřich. Forcing idealized. Vol. 174. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

4. Osuga, Noboru & Kamo, Shizuo. (2008). The cardinal coefficients of the Ideal I-f. Archive for Mathematical Logic. 47. 10.1007/s00153-008-0091-5.

5. Yorioka, Teruyuki. “The Cofinality of the Strong Measure Zero Ideal.” The Journal of Symbolic Logic, vol. 67, no. 4, 2002, pp. 1373–1384.

謝辞

- 定理1，定理2の証明の際，木原貴行氏，伊敷喜斗氏からそれぞれ助言を頂いた

使用画像

Photo by sergio medina on Unsplash (https://unsplash.com/photos/U4zohVXjQaE)

ご清聴ありがとうございました