# 基数不変量のゲーム理論的バリエーション

**後藤 達哉**

神戸大学

2023 年 9 月 23 日
日本数学会秋季総合分科会 2023 @ 東北大学

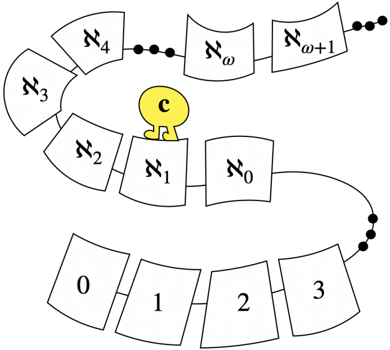
本研究は Jorge Antonio Cruz Chapital および林佑亮との共同研究である
本研究は JSPS 科研費 JP22J20021 の助成を受けたものである

# 集合論

集合論は無限集合，特にその濃度について様々な考察をする分野である．

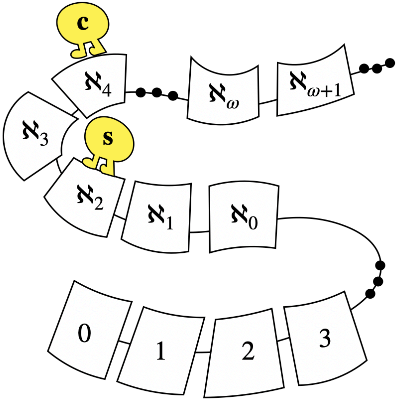
可算濃度を $\aleph_0$ とし，連続体濃度を $\mathbf{c}$ と書く． 可算濃度の一個次の基数を $\aleph_1$ と書く．

$\aleph_0 < \mathbf{c}$ は ZFC の定理 (Cantor) だが，$\mathbf{c}$ が $\aleph_1$ かどうかであるかは ZFC で決定できない (Gödel, Cohen)．



# 基数不変量

連続体の**基数不変量**は実数の構造から定まる基数である．それらは典型的には $\aleph_1$ 以上 $\mathfrak{c}$ 以下の値を取る．それらの多くは $\aleph_1$ と等しいことも $\mathfrak{c}$ と等しいこともZFCでは証明できないものである．



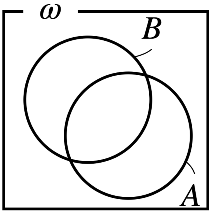
# 無限ゲーム

ターン数が無限 ($\omega$) の 2 人が対戦するゲーム (無限ゲーム) は，集合論において非常に重要．

特に，決定公理は無限ゲームに関する重要な公理だが，選択公理と互いに排反である．今回は特に決定公理のことは考えず，普段どおり選択公理を仮定する．

本研究は基数不変量をゲーム理論的に修正して得られるものを調べることにより，基数不変量とゲーム理論の二つの分野を接続する．

# splitting number の定義




自然数の無限集合 $A, B$ について $A$ が $B$ を
**分割する**とは，

$$|B \cap A| = |B \setminus A| = \aleph_0$$

を満たすこと．自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}$ について

- $\mathcal{S}$ が **splitting family**
  $$:\iff (\forall B \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{S})(A \text{ が } B \text{ を分割する})$$

次の $\mathfrak{s}$ を splitting number という：

- $\mathfrak{s} := \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ は splitting family}\}$

# $\mathbf{s}$ と基数不変量

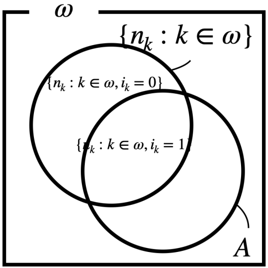
**$\mathbf{s}$ は連続体の基数不変量の典型例である.**

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \mathbf{r} \arrow[r] & \mathbf{c} \\
\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[rr] \arrow[urrrr] & & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[u] \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[uurr] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uuur] & & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \\
\aleph_1 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{s} \arrow[uuur] \arrow[uurr] \arrow[urrrr] & & & &
\end{tikzcd}
$$

# splitting game

集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ を固定．次のゲームを $\mathcal{A}$ に関する **splitting game** と呼ぶ:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| プレイヤーI | $n_0$ | | $n_1$ | | $\dots$ | |
| プレイヤーII | | $i_0$ | | $i_1$ | | $\dots$ |




$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots$ は単調増大な自然数列で，$i_0, i_1, \dots, i_k, \dots$ は $\{0,1\}$ の元の列．プレイヤーII が勝つ $\Leftrightarrow$ プレイヤーII が 0 と 1 をそれぞれ無限回プレイしていて，かつある $A \in \mathcal{A}$ が存在して，

$$\{n_k : k \in \omega\} \cap A = \{n_k : k \in \omega \text{ and } i_k = 1\}.$$

# splitting game に関する基数不変量の定義

**定義**

$$\mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega),\ \text{プレイヤー I が } \mathcal{A} \text{ に関する splitting game で必勝戦略を持たない}\}$$

$$\mathbf{s}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{game}} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega),\ \text{プレイヤー II が } \mathcal{A} \text{ に関する splitting game で必勝戦略を持つ}\}$$

# splitting gameに関する定理

次はかんたんにわかる．

**命題**

$\mathsf{s} \leq \mathsf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}} \leq \mathsf{s}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{game}} \leq \mathsf{c}$.

次は議論が必要．

**定理**

$\mathsf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}} = \mathsf{s}_\sigma$ かつ $\mathsf{s}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{game}} = \mathsf{c}$.

($\mathsf{s}_\sigma$ の定義は次のページ)

# $\sigma$-splitting number の定義

自然数の無限集合 $A$ と $f : \omega \to [\omega]^\omega$ について $A$ が $f$ を **$\sigma$-分割する**とは，

$$\text{任意の } n \text{ に対して } A \text{ が } f(n) \text{ を分割する}$$

ということ．自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}$ について

- $\mathcal{S}$ が **$\sigma$-splitting family**
  $$:\iff (\forall f : \omega \to [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{S})(A \text{ が } f \text{ を } \sigma \text{ 分割する})$$

次の $\mathfrak{s}_\sigma$ を $\sigma$-splitting number という：

- $\mathfrak{s}_\sigma := \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ は } \sigma\text{-splitting family}\}$

$\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{s}_\sigma$ が ZFC で等しいことが示せるかどうかは長年の未解決問題！

# splitting* game

集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ を固定．次のゲームを $\mathcal{A}$ に関する **splitting* game** と呼ぶ:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| プレイヤー I | $i_0$ | | $i_1$ | | $\dots$ | |
| プレイヤー II | | $j_0$ | | $j_1$ | | $\dots$ |

$i_0, i_1, \dots, i_k, \dots$ と $j_0, j_1, \dots, j_k, \dots$ はどちらも $\{0, 1\}$ の元の列．プレイヤー II が勝つのはプレイヤー I が有限回しか 1 を言わなかったとき，または，

$\{k \in \omega : j_k = 1\}$ は $\mathcal{A}$ の元でかつ $\{k \in \omega : i_k = 1\}$ を分割する

となるとき．

# splitting* game に関する基数不変量の定義

**定義**

$$\mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega),$$

プレイヤー I が $\mathcal{A}$ に関する splitting* game で必勝戦略を持たない $\}$

$$\mathbf{s}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{game}^*} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega),$$

プレイヤー II が $\mathcal{A}$ に関する splitting* game で必勝戦略を持つ $\}$

# splitting* game についての考察

splitting* game はプレイヤー II にとって splitting game より難しいゲーム．
したがって，$\mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}} \leq \mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*}$ かつ $\mathbf{s}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{game}} \leq \mathbf{s}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{game}^*}$．つまり，
$\mathbf{s}_\sigma \leq \mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*}$ かつ $\mathbf{s}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{game}^*} = \mathbf{c}$．

# splitting* gameについての定理

**定理**

命題 $\mathfrak{s} < \mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*}$ は ZFC から相対的に無矛盾.

**定理**

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} \leq \mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}, \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

# $\mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}}$ を追加した図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \mathbf{r} \arrow[r] & \mathbf{c} \\
\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[rr] \arrow[urrrrr] & & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[u] \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uurrr] & & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[uuur] & & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \\
\aleph_1 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{s} \arrow[r] & \mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}} = \mathbf{s}_{\sigma} \arrow[r] & \mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}*} \arrow[uuul] \arrow[uur] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}
$$

# 参考文献


[Bar10] Tomek Bartoszynski. “Invariants of measure and category”. In: *Handbook of Set Theory*. Springer, 2010, pp. 491–555.

[BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set Theory: on the structure of the real line*. CRC Press, 1995.

[Bla10] Andreas Blass. “Combinatorial cardinal characteristics of the continuum”. In: *Handbook of set theory*. Springer, 2010, pp. 395–489.

[HMM10] Michael Hrušák, David Meza-Alcántara, and Hiroaki Minami. “Pair-splitting, pair-reaping and cardinal invariants of $F\sigma$-ideals”. In: *The Journal of Symbolic Logic* 75.2 (2010), pp. 661–677.

[IS88] Jaime I. Ihoda and Saharon Shelah. “Souslin Forcing”. In: *Journal of Symbolic Logic* 53.4 (1988), pp. 1188–1207.


**我々のプレプリント： arXiv:2308.12136**