測度0集合の和集合に関するGoldsternの原理

後藤 達哉

神戸大学

2022 年 9 月 15 日
日本数学会 2022 年度秋季総合分科会 @ 北海道大学

測度0集合の和集合

(Y, μ) をポーランド確率空間とする．測度の可算加法性より，測度 0 集合の可算個の和集合は再び測度 0 である．

Q. 連続体濃度個の測度 0 集合の和集合だとどうか？
A. 必ずしも測度 0 ではない (たとえば：一点集合たちの和集合).

Q. 与えれた測度 0 集合たちに何か仮定を加えたらどうか？
A. それをすると，連続体濃度個の測度 0 集合の和集合も測度 0 となる！

Goldstern の定理

(full domination order) $x, x' \in \omega^\omega$ について関係 $x \leq x'$ を $(\forall n \in \omega)(x(n) \leq x'(n))$ で定める．

1993 年，Martin Goldstern は次の定理を証明した．

Goldstern の定理 $(\mathrm{ZF} + \mathrm{DC})$

(Y, μ) をポーランド確率空間とする．$A \subseteq \omega^\omega \times Y$ を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合とする．各 $x \in \omega^\omega$ について

$$A_x := \{y \in Y : (x, y) \in A\}$$

が測度 0 だと仮定する．また $(\forall x, x' \in \omega^\omega)(x \leq x' \Rightarrow A_x \subseteq A_{x'})$ を仮定する．このとき $\bigcup_{x \in \omega^\omega} A_x$ も測度 0 である．

原理 GP(Γ)

定義

Γ をポイントクラスとする．このとき GP(Γ) とは次の主張である: (Y,μ) をポーランド確率空間とし $A \subseteq \omega^\omega \times Y$ は Γ に属するとする．各 $x \in \omega^\omega$ について A_x は測度 0 だとする．また $(\forall x, x' \in \omega^\omega)(x \leq x' \Rightarrow A_x \subseteq A_{x'})$ だとする．すると $\bigcup_{x\in\omega^\omega} A_x$ も測度 0 である．

Goldstern の定理は $\mathrm{GP}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$ が成り立つことを主張している．

主結果

記号 “all” はポーランド空間のすべての部分集合のなすクラスを表す．

定理

GP(all) は ZFC から独立している．

¬ GP(all) の無矛盾性

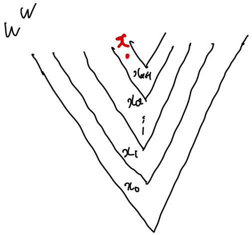
定理

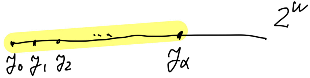
CH を仮定すると ¬ GP(all) が導かれる．

証明． $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を $(\omega^\omega, <^*)$ の共終単調増加列とする．
$\langle y_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を 2^ω の元の枚挙とする．すると次で定まる集合 A は ¬ GP(all) の証拠である:

$$A_x = \{y_\beta : \beta < \alpha_x\},$$

ここで $\alpha_x = \min\{\alpha : x <^* x_\alpha\}$. $\square$





$\neg\,\mathrm{GP}(\mathrm{all})$ の無矛盾性

最後の証明を改良すると次の定理も得られる．

定理

次の 3 つの条件のうち少なくとも 1 つが成立すると仮定する．

$$\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{b},\ \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{b} \text{ or } \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{d}.$$

すると $\neg\,\mathrm{GP}(\mathrm{all})$ が成り立つ．

$\mathrm{add}(\mathcal{N}) := \min\{\kappa : \text{the null ideal is not } \kappa\text{-additive}\}$

$\mathrm{non}(\mathcal{N}) := \min\{|A| : A \subseteq 2^\omega, A \text{ does not have measure } 0\}$

$\mathfrak{b} := \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \neg(\exists g \in \omega^\omega)(\forall f \in F)\ f <^* g\}$

$\mathfrak{d} := \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, (\forall g \in \omega^\omega)(\exists f \in F)\ g <^* f\}$

$\neg\,\mathrm{GP}(\mathrm{all})$ の無矛盾性

次の 3 つの条件のうち少なくとも 1 つが成立すると仮定する: $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{b}$, $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{b}$ or $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = \mathfrak{d}$. すると $\neg\,\mathrm{GP}(\mathrm{all})$ が成り立つ.

$\mathrm{add}(\mathcal{N}) := \min\{\kappa : \text{the null ideal is not } \kappa\text{-additive}\}$

$\mathrm{non}(\mathcal{N}) := \min\{|A| : A \subseteq 2^\omega, A \text{ does not have measure } 0\}$

$\mathfrak{b} := \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \neg(\exists g \in \omega^\omega)(\forall f \in F)\ f <^* g\}$

$\mathfrak{d} := \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, (\forall g \in \omega^\omega)(\exists f \in F)\ g <^* f\}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

$V = L$ は $\neg\,\mathrm{GP}(\Delta^1_2)$ を含意する

最後の定理の証明を別の方法で改良すると，次の定理も得られる．

定理

$V = L$ は $\neg\,\mathrm{GP}(\Delta^1_2)$ を導く．

GP(all) の無矛盾性

定理

ZFC が無矛盾ならば $\mathrm{ZFC} + \mathsf{GP(all)}$ も無矛盾である．

実際，“Laver モデル” が GP(all) のモデルである．

equal to $\aleph_2$ in the Laver model

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

equal to $\aleph_1$ in the Laver model

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 正則性との関係

定理

$\mathbf{\Sigma}^1_2$ Lebesuge 可測性は $\mathrm{GP}(\mathbf{\Sigma}^1_2)$ を導く．さらに $\mathrm{GP}(\mathbf{\Delta}^1_2)$ は任意の実数 a に対して $L[a]$ 上の dominating 実数があることを導く．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{\Sigma}^1_2\text{-LM} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{\Sigma}^1_2\text{-BP} \arrow[rr] & & \begin{array}{l}(\forall a \in \mathbb{R})(\exists z \in \omega^\omega) \\ \quad (z \text{ is a dominating real over } L[a])\end{array} \\
& \mathrm{GP}(\mathbf{\Sigma}^1_2) \arrow[r] & \mathrm{GP}(\mathbf{\Delta}^1_2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

決定性と Solovay モデル

定理

$\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}$ を仮定すると GP(all) が成り立つ.

定理

Solovay モデルにおいて GP(all) が成り立つ.

まとめ

- Goldstern は GP($\mathbf{\Sigma}^1_1$) を証明した．
- 我々は次を証明した:
  1. GP(all) が ZFC から独立している．
  2. $V = L$ が $\neg$ GP(Δ^1_2) を導く．
  3. $\mathrm{ZF} + \mathrm{AD}$ が GP(all) を導く．
  4. Solovay モデルで GP(all) が成り立つ．

未解決問題

1. $V = L$ は $\neg\,\mathrm{GP}(\Pi^1_1)$ を導くか？
2. $\mathrm{ZFC} + (\mathfrak{c} > \aleph_2) + \mathrm{GP}(\mathrm{all})$ は無矛盾か？
3. (到達不能基数を仮定して)ZF のモデルで実数の任意の集合が Lebesgue 可測だが，GP(all) を満たさないものはあるか？
4. ある $n \geq 2$ (または全ての $n \geq 2$) について，$\mathrm{GP}(\Sigma^1_{n+1})$ と $\mathrm{GP}(\Sigma^1_n)$ を分離することは，巨大基数を使わずにできるか？

参考文献と謝辞

[Gol93] Martin Goldstern. "An Application of Shoenfield's Absoluteness Theorem to the Theory of Uniform Distribution.". In: *Monatshefte für Mathematik* 116.3-4 (1993), pp. 237–244.

この研究のプレプリント：arXiv:2206.08147

この研究において吉信康夫氏，木原貴行氏，Jörg Brendle 氏，池上大祐氏，Martin Goldstern 氏に助言を頂いた．

本研究は JSPS 科研費 JP22J20021 の助成を受けたものである．