量化子「非可算個存在して」を持つ論理の完全性 Part II

後藤 達哉

2024 年 6 月 18 日

算術と様相論理の研究・論文セミナー @ 神戸大学

目次

1. 復習
2. サブ補題
3. メイン補題とその系の証明
4. 完全性定理の証明
5. 集合論への応用

目次

1. 復習
2. サブ補題
3. メイン補題とその系の証明
4. 完全性定理の証明
5. 集合論への応用

論理 $L(Q)$ の証明論

$L(Q)$ の公理は次の通り：

- **公理 0** L の公理図式すべて (等号公理も含める)．
- **公理 1** $\neg(Qx)(x = y \lor x = z)$.
- **公理 2** $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((Qx)\varphi \to (Qx)\psi)$.
- **公理 3** $(Qx)\varphi(x, \ldots) \leftrightarrow (Qy)\varphi(y, \ldots)$. (ただし $\varphi(x, \ldots)$ は自由変数 x に y を代入可能な論理式)
- **公理 4** $(Qy)(\exists x)\varphi \to (\exists x)(Qy)\varphi \lor (Qx)(\exists y)\varphi$.

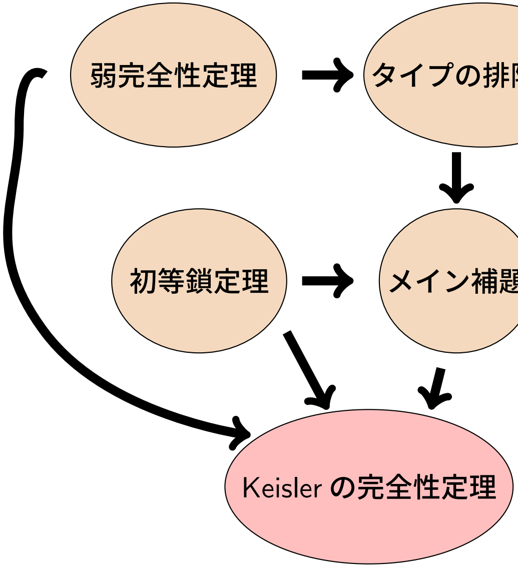
ここで φ, ψ は自由変数を含んで良い論理式で，x, y, z は互いに異なる変数である．$L(Q)$ の推論規則は Modus Ponens と一般化である．

メイン定理

Keislerの完全性定理

T を $L(Q)$ の文の集合とする．T が $L(Q)$ で無矛盾ならば，T は標準モデルを持つ．

地図



弱完全性定理

弱完全性定理

T を $L(Q)$ の文の集合とする．T が $L(Q)$ で無矛盾ならば，T は弱モデルを持つ．

定理 (タイプの排除)

T を $L(Q)$ の無矛盾な文の集合とする．また各 $n \in \omega$ について $\Sigma_n(x_n)$ を $L(Q)$ の論理式 (x_n だけが自由変数) の集合とする．次を仮定する：各 $n \in \omega$ と $L(Q)$ 論理式 $\varphi(x_n)$ について，もし $(\exists x_n)\varphi$ が T と無矛盾であれば，$\sigma \in \Sigma_n$ があり，$(\exists x_n)(\varphi \wedge \neg\sigma)$ も T と無矛盾である．このとき，T は可算弱モデル $(\mathcal{A}, q)$ を持ち，すべての Σ_n ($n \in \omega$) を排除する．

初等鎖定理

定義 (初等鎖の和)

$\langle \mathcal{A}_\alpha, q_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma}$ が初等鎖であるとき，その和とは $(\mathcal{A}, q)$ であって，$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{A}_\alpha$ かつ

$$q = \{S \subseteq A : (\exists \alpha < \gamma)(\forall \beta \in [\alpha, \gamma))\ S \cap A_\beta \in q_\beta\}$$

なものを言う．

初等鎖定理

$\langle \mathcal{A}_\alpha, q_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma}$ は初等鎖とし，$(\mathcal{A}, q)$ をその和とする．このときすべての $\alpha < \gamma$ について，

$$(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{A}, q).$$

メイン補題

$(\mathcal{A}, q)$ を可算弱構造で，$L(Q)$ の公理すべてを満たすとする．L^* を L に $\mathcal{A}$ の元全てに対する定数記号を付与した言語，$\mathcal{A}$ を L^* 構造に拡大したものを $\mathcal{A}^*$ とする．$\varphi(x)$ を $L^*(Q)$ 論理式で $(\mathcal{A}^*, q) \models (Qx)\varphi(x)$ となるものとする．このとき次を満たす可算初等拡大 $(\mathcal{B}, r) \succ (\mathcal{A}, q)$ が存在する：

1. ある $b \in B \setminus A$ について $(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b]$.
2. どんな $L^*(Q)$ 論理式 $\psi(y)$ で，$(\mathcal{A}^*, q) \models \neg(Qy)\psi(y)$ なものについても，$\{a \in B : (\mathcal{B}^*, r) \models \psi[a]\} \subseteq A$.

目次

1. 復習
2. サブ補題
3. メイン補題とその系の証明
4. 完全性定理の証明
5. 集合論への応用

サブ補題 1

サブ補題 1

$\vdash (Qx)(\varphi \vee \psi) \to (Qx)\varphi \vee (Qx)\psi.$

結構難しい．省略するか板書でやるかのどちらか．

記法

$L(Q)$ 弱構造 $(\mathcal{A}, q)$ について，各元に対応する定数記号を足した言語の構造に拡大した弱構造を $(\mathcal{A}^*, q)$ と書く．

サブ補題 2

$(\mathcal{A}, q)$ を $L(Q)$ の弱モデルとし，L^* を $\mathcal{A}^*$ の言語とする．もし $(\mathcal{A}, q)$ が $L(Q)$ のすべての公理を満たすのならば，$(\mathcal{A}^*, q)$ が $L^*(Q)$ のすべての公理を満たす．

証明．φ を $L^*(Q)$ の公理の一つとする．$a_1, \ldots, a_n$ を φ に現れる $L^* \setminus L$ の定数記号のすべてとする．φ に現れない変数 $v_1, \ldots, v_n$ を選んで各 a_i を v_i に置換した論理式 ψ を考える．ψ は $L(Q)$ の公理である．よって，

$(\mathcal{A}, q) \models (\forall v_1 \ldots v_n)\psi$ であるので，$(\mathcal{A}^*, q) \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$. ∎

目次

1. 復習
2. サブ補題
3. メイン補題とその系の証明
4. 完全性定理の証明
5. 集合論への応用

メイン補題

$(\mathcal{A}, q)$ を可算弱構造で，$L(Q)$ の公理すべてを満たすとする．L^* を L に A の元全てに対する定数記号を付与した言語，$\mathcal{A}$ を L^* 構造に拡大したものを $\mathcal{A}^*$ とする．$\varphi(x)$ を $L^*(Q)$ 論理式で $(\mathcal{A}^*, q) \models (Qx)\varphi(x)$ となるものとする．このとき次を満たす可算初等拡大 $(\mathcal{B}, r) \succ (\mathcal{A}, q)$ が存在する：

1. ある $b \in B \smallsetminus A$ について $(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b]$.
2. どんな $L^*(Q)$ 論理式 $\psi(y)$ で，$(\mathcal{A}^*, q) \models \neg(Qy)\psi(y)$ なものについても，$\{a \in B : (\mathcal{B}^*, r) \models \psi[a]\} \subseteq A$.

板書で証明します！

メイン補題の系

$(\mathcal{A}, q)$ を可算弱構造で，$L(Q)$ の公理すべてを満たすとする．L^* を L に $\mathcal{A}$ の元全てに対する定数記号を付与した言語，$\mathcal{A}$ を L^* 構造に拡大したものを $\mathcal{A}^*$ とする．このとき次を満たす可算初等拡大 $(\mathcal{B}, r) \succ (\mathcal{A}, q)$ が存在する：

1. どんな $L^*(Q)$ 論理式 $\varphi(y)$ についても，$(\mathcal{A}^*, q) \models (Qy)\psi(y)$ なことと，ある $a \in B \setminus A$ について $(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b]$ となることは同値．

証明：メイン補題を可算回繰り返して，長さ ω の初等鎖を作り，その和を取る． ■

目次

1. 復習
2. サブ補題
3. メイン補題とその系の証明
4. 完全性定理の証明
5. 集合論への応用

完全性定理

Keisler の完全性定理

T を $L(Q)$ の文の集合とする．T が $L(Q)$ で無矛盾ならば，T は標準モデルを持つ．

完全性定理の証明 (1/4)

適切に初等鎖 $(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha)$ の和 $(\mathcal{A}, q)$ を作り，q の代わりに $\mathcal{A}$ を標準構造として考えると $\mathcal{A}$ が目的のモデルとなる．
初等鎖の構成：$(\mathcal{A}_0, q_0)$ は T の可算弱モデルとする．後続ステージでは，$(\mathcal{A}_{\alpha+1}, q_{\alpha+1})$ はメイン補題の系を $(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha)$ に適用して得られる可算弱モデルとする．極限ステージではそこまでの和をとる．

メイン補題の系より，この構成で次が成り立つ：任意の $\alpha < \omega_1$ と任意の論理式 $\varphi(x)$ で言語は $(\mathcal{A}^*_\alpha, q_\alpha)$ のものについて

$$(\mathcal{A}^*_\alpha, q_\alpha) \models (Qx)\varphi(x) \iff \text{for some } a \in A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha,\ (\mathcal{A}^*_{\alpha+1}, q_{\alpha+1}) \models \varphi[a].$$

完全性定理の証明 (2/4)

次を示せば十分．

$$(\mathcal{A}, q) \models \varphi[b_1, \ldots, b_n] \iff \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n].$$

これを示すため，論理式 φ に関する帰納法を行う．φ が原子論理式のときは明らか．また一番外側の記号が $\neg$, $\wedge$, $\exists$ のときも明らか．そこで $\varphi \equiv (Qx_0)\psi$ のときを考える．$b_1, \ldots, b_n \in B$ とする．するとある $\alpha < \omega_1$ について $b_1, \ldots, b_n \in B_\alpha$ である．

$(\mathcal{A}, q) \models ((Qx_0)\psi)[b_1, \ldots, b_n]$ と仮定する．すると，q の作り方と初等鎖の作り方により

$$S = \{a \in A : (\mathcal{A}, q) \models \psi[a, b_1, \ldots, b_n]\}$$

は非可算集合．また帰納法の仮定より，この集合 S は $S = \{a \in A : \mathcal{A} \models \psi[a, b_1, \ldots, b_n]\}$ でもある．したがって，

$$\mathcal{A} \models ((Qx_0)\psi)[b_1, \ldots, b_n].$$

完全性定理の証明 (4/4)

$(\mathcal{A}, q) \models (\neg(Qx_0)\psi)[b_1, \ldots, b_n]$ と仮定する．初等鎖の作り方より，

$$S = \{a \in A : (\mathcal{A}, q) \models \psi[a, b_1, \ldots, b_n]\} \subseteq A_\alpha$$

がわかる．A_α は可算なので S も可算．またもう一度 ψ に帰納法の仮定を使うと

$$\mathcal{A} \models (\neg(Qx_0)\psi)[b_1, \ldots, b_n]$$

となる． ■

目次

1. 復習
2. サブ補題
3. メイン補題とその系の証明
4. 完全性定理の証明
5. 集合論への応用

集合論への応用

$L^\omega(Q)$ は ω 論理と $L(Q)$ の合体物であり，これについても完全性定理が証明されている．この事実を集合論に応用する．

集合論への応用

定義

$\langle f_\alpha, A_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \omega_1 \rangle$ が nontrivial coherent family であるとは

1. A_α は自然数の無限集合で $f_\alpha \colon A_\alpha \to \alpha$.
2. $\alpha < \beta < \omega_1$ について $A_\alpha \subseteq^* A_\beta$.
3. $\alpha < \beta < \omega_1$ について $f_\alpha \upharpoonright (A_\alpha \cap A_\beta) =^* f_\beta \upharpoonright (A_\alpha \cap A_\beta)$
4. $\xi < \eta < \alpha$ と $n \in \omega$ について次の集合は有限：

$$\{\beta \in [\eta, \alpha) : f_\beta^{-1}(\{\xi\}) \cap f_\alpha^{-1}(\{\eta\}) \subseteq n\}$$

定理 (Farah)

nontrivial coherent family が存在する.

集合論への応用

定理 nontrivial coherent family が存在する．

略証．

1. うまく $L^{\omega}(Q)$ 理論 T を作って，T のモデルの存在と nontrivial coherent family の存在が同値になるようにする
2. 強制法で宇宙 V を $V[G]$ に広げて nontrivial coherent family を付け加える
3. $V[G]$ で T は無矛盾なので，V でも T は無矛盾である
4. よって $L^{\omega}(Q)$ の完全性定理より，V で T のモデルが存在し，したがって ①より nontrivial coherent family が V でも存在する ■