量化子「非可算個存在して」を持つ論理の完全性 Part I

後藤 達哉

2024 年 6 月 11 日

算術と様相論理の研究・論文セミナー @ 神戸大学

目次

目次

目標

- 一階述語論理 L に「非可算個の x が存在して」という解釈を持つ量化子 (Qx) を加えた論理の完全性を証明する．

参考文献

[Kei70] H. Jerome Keisler. "Logic with the quantifier "there exist uncountably many"". In: *Annals of Mathematical Logic* 1.1 (1970), pp. 1–93.

Keisler 以前に Mostowski，Fuhrken，Vaught もこの論理を研究している．

論理 $L(Q)$ とのその弱構造

$L(Q)$ を一階述語論理 L (等号記号を含め，可算個の述語記号，関数記号，定数記号を持つ) に量化子 (Qx) を加えた論理とする．

$L(Q)$ の**弱構造**とは，$(\mathcal{A}, q)$ であって，$\mathcal{A}$ は一階述語論理 L の構造であって，$q \subseteq \mathcal{P}(A)$ を満たすもののこと．

$L(Q)$ の弱構造 $(\mathcal{A}, q)$ と $L(Q)$ 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と A の要素 $a_1, \ldots, a_n$ について関係 $(\mathcal{A}, q) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ を通常通りに定める．ただし，

$$(\mathcal{A}, q) \models (Qv_m)\varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \{b \in A : (\mathcal{A}, q) \models \varphi[a_1, \ldots, b, \ldots, a_n]\} \in q$$

論理 $L(Q)$ の標準構造

$L(Q)$ の**標準構造**とは弱構造 $(\mathcal{A}, q)$ であって q が A の非可算部分集合全体の集合となっているものをいう．

標準構造 $(\mathcal{A}, q)$ については $(\mathcal{A}, q) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ を単に q を省略して $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ と書く．

論理 $L(Q)$ の証明論

$L(Q)$ の公理を次で定める：

- 公理 0　L の公理図式すべて (等号公理も含める).
- 公理 1　$\neg(Qx)(x = y \vee x = z)$.
- 公理 2　$(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((Qx)\varphi \to (Qx)\psi)$.
- 公理 3　$(Qx)\varphi(x, \ldots) \leftrightarrow (Qy)\varphi(y, \ldots)$. (ただし $\varphi(x, \ldots)$ は自由変数 x に y を代入可能な論理式)
- 公理 4　$(Qy)(\exists x)\varphi \to (\exists x)(Qy)\varphi \vee (Qx)(\exists y)\varphi$.

ここで φ, ψ は自由変数を含んで良い論理式で，x, y, z は互いに異なる変数である.

論理 $L(Q)$ の証明論

$L(Q)$ の推論規則は Modus Ponens と一般化である．

メイン定理

Keisler の完全性定理

T を $L(Q)$ の文の集合とする．T が $L(Q)$ で無矛盾ならば，T は標準モデルを持つ．

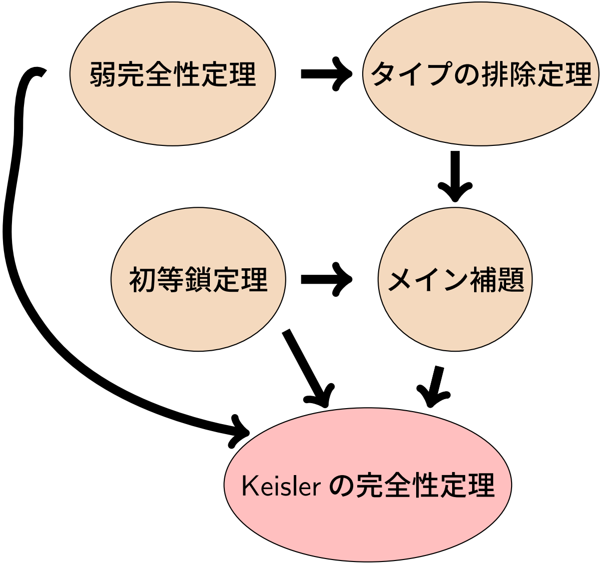
余談：量化子「無限個存在して」を持つ完全な証明体系はない

量化子「無限個存在して」を持つ完全な証明体系はない．なぜなら，あるとしたらその論理についてコンパクト性定理も成り立つ．ところが理論

$$T = \{\neg(Ix)(x = x), (\exists x_0) \ldots (\exists x_n) \bigwedge_{i<j\leqslant n} x_i \neq x_j : n \in \omega\}$$

はコンパクト性定理の反例となる (ただし (Ix) が無限個 x が存在して，という量化子)．

地図



目次

弱完全性定理

Keisler の完全性定理のために，まず以下を示す．

弱完全性定理

T を $L(Q)$ の文の集合とする．T が $L(Q)$ で無矛盾ならば，T は弱モデルを持つ．

証拠集合

定義

T を $L(Q)$ の文の集合とする．C を定数記号の集合とする．C が T の**証拠集合**であるとは，任意の $\varphi(x)$ について $c \in C$ があって，

$$T \vdash (\exists x)\varphi(x) \to \varphi(c).$$

弱完全性のための補題

補題

T を $L(Q)$ の文の極大無矛盾集合とし，C を T の証拠集合とする．T は弱モデル $(\mathcal{A}, q)$ を持ち，そのどんな元 $a \in A$ もある $c \in C$ の解釈である．

弱完全性のための補題：証明 (1/6)

T を $L(Q)$ の文の極大無矛盾集合とし，C を T の証拠集合とする．T は弱モデル $(\mathcal{A}, q)$ であって，どんな $a \in A$ もある $c \in C$ の解釈である．

証明．$T_0 = T \cap L$ とおく．T_0 は L の意味で極大無矛盾であり，C は T_0 の証拠集合でもある．したがって，一階述語論理の完全性定理の証明より，T_0 はモデル $\mathcal{A}$ を持ち，その任意の元は C の元の解釈である．

$c \in C$ について $\bar{c}$ を c の $\mathcal{A}$ の中での解釈とする．よって，$A = \{\bar{c} : c \in C\}$．これから q を定義して $(\mathcal{A}, q)$ が弱モデルとなるようにする．

弱完全性のための補題：証明 (2/6)

一個しか自由変数を持たない論理式 $\varphi(x)$ について，

$$S_\varphi = \{\bar{c} : c \in C, T \vdash \varphi(c)\}$$

とおく．

$$q = \{S_\varphi : T \vdash (Qx)\varphi(x)\}$$

とおく．

弱完全性のための補題：証明 (3/6)

この q が所望のものなことを示そう．よって，文 φ に関する帰納法で，

$$(\mathcal{A}, q) \models \varphi \iff T \vdash \varphi$$

を示す．

φ が原子論理式のときは $\varphi \in L$ なのでよい．$\neg\varphi$ や $\varphi \wedge \psi$ の場合も Γ の極大性からわかる．

$\varphi \equiv (\exists x)\psi(x)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}, q) \models \varphi &\iff (\mathcal{A}, q) \models \psi(c) \text{ for some } c \in C \\
&\iff T \vdash \psi(c) \text{ for some } c \in C \quad \text{(by IH)} \\
&\iff T \vdash (\exists x)\psi(x) \qquad \text{(by } C\text{: 証拠集合)}
\end{aligned}$$

弱完全性のための補題：証明 (4/6)

最後に $\varphi \equiv (Qx)\psi(x)$ のときを考える．まず次に注意する．

$$
\begin{aligned}
S_\psi &= \{\bar{c} : T \vdash \psi(c)\} \\
&= \{\bar{c} : (\mathcal{A}, q) \models \psi(c)\} \quad \text{by IH} \\
&= \{\bar{c} : (\mathcal{A}, q) \models \psi[c]\} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

もし，$T \vdash (Qx)\psi(x)$ ならば，$S_\psi \in q$ (q の定義)．よって $(*)$ より，$(\mathcal{A}, q) \models (Qx)\psi(x)$.

弱完全性のための補題：証明 (5/6)

逆に $(\mathcal{A}, q) \models (Qx)\psi(x)$ とする．すると $S_\psi \in q$ なので，q の定義より，$S_\psi = S_\theta$ かつ $T \vdash (Qy)\theta(y)$ となる θ がある．今，各 $c \in C$ について次を持つ．

$$\bar{c} \in S_\psi \iff T \vdash \psi(c)$$
$$\bar{c} \in S_\theta \iff T \vdash \theta(c)$$

したがって，T が極大無矛盾性より，各 $c \in C$ について $T \vdash \psi(c) \leftrightarrow \theta(c)$．$u$ を ψ にも θ にも登場しない変数とする．すると C が証拠集合かつ T が極大無矛盾なことより次を得る．

$$T \vdash (\forall u)(\psi(u) \leftrightarrow \theta(u))$$

弱完全性のための補題：証明 (6/6)

したがって公理 2 より，

$$T \vdash (Qu)\psi(u) \leftrightarrow (Qu)\theta(u).$$

これプラス公理 3 を 2 回使うと，

$$T \vdash (Qx)\psi(x) \leftrightarrow (Qy)\theta(y).$$

したがって，$T \vdash (Qy)\theta(y)$ より $T \vdash (Qx)\psi(x)$. これで証明終了！ ■

弱完全性定理

T を $L(Q)$ の文の集合とする．T が $L(Q)$ で無矛盾ならば，T は弱モデルを持つ．

証明．さっきの補題を使えば，一階述語論理の完全性のときと全く同じ証明ができる． ∎

目次

定理 (タイプの排除 in 一階述語論理)

T を L の無矛盾な文の集合とする．また各 $n \in \omega$ について $\Sigma_n(x_n)$ を L の論理式 (x_n だけが自由変数) の集合とする．次を仮定する：各 $n \in \omega$ と L 論理式 $\varphi(x_n)$ について，もし $(\exists x_n)\varphi$ が T と無矛盾であれば，$\sigma \in \Sigma_n$ があり，$(\exists x_n)(\varphi \land \neg\sigma)$ も T と無矛盾である．このとき，T は可算モデル $\mathcal{A}$ を持ち，すべての Σ_n $(n \in \omega)$ を排除する．

$\mathcal{A}$ が Σ を**排除する**とは，すべての $a \in A$ についてある $\sigma \in \Sigma$ があって $\mathcal{A} \models \neg\sigma(a)$ となることをいう．

タイプの排除定理の応用例

脱線するが，一階述語論理のタイプの排除の応用例を一つ見る．

例 Peano 算術の任意の可算モデル $\mathcal{A}$ についてそれの初等的な真の終拡大が存在する．

A の各元 $a \in A$ に対する定数記号と新しい定数記号 c を用意する．理論 T を $(\mathcal{A}, a)_{a \in A}$ の理論と $\{c > a : a \in A\}$ の和集合とする．
$\Sigma_a(x) = \{x < a\} \cup \{x \neq b : b < a\}$ とおく．これらが排除定理の仮定を満たすことを示すのは演習とする！

すべての Σ_a を排除する T のモデルは $\mathcal{A}$ の初等的な終拡大である． ■

タイプの排除定理 in $L(Q)$

定理 (タイプの排除 in $L(Q)$)

T を $L(Q)$ の無矛盾な文の集合とする．また各 $n \in \omega$ について $\Sigma_n(x_n)$ を $L(Q)$ の論理式 (x_n だけが自由変数) の集合とする．次を仮定する：各 $n \in \omega$ と $L(Q)$ 論理式 $\varphi(x_n)$ について，もし $(\exists x_n)\varphi$ が T と無矛盾であれば，$\sigma \in \Sigma_n$ があり，$(\exists x_n)(\varphi \wedge \neg\sigma)$ も T と無矛盾である．このとき，T は可算弱モデル $(\mathcal{A}, q)$ を持ち，すべての Σ_n ($n \in \omega$) を排除する．

タイプの排除定理 in $L(Q)$ の証明 (1/4)

ω 個存在する Σ_n $(n \in \omega)$ の代わりに一個の Σ の場合の証明をする．

主張 T は $L(Q)$ の無矛盾な文の集合．$\Sigma(x)$ を $L(Q)$ の論理式 (x だけが自由変数) の集合．各 $L(Q)$ 論理式 $\varphi(x)$ について，もし $(\exists x)\varphi$ が T と無矛盾であれば，$\sigma \in \Sigma$ があり，$(\exists x)(\varphi \wedge \neg\sigma)$ も T と無矛盾．このとき，T は可算弱モデル $(\mathcal{A}, q)$ を持ち，Σ $(n \in \omega)$ を排除する．

証明．$C = \{c_0, c_1, \ldots\}$ を可算個の新しい定数記号とし $L^*(Q) = L(Q) \cup C$ とする．$L^*(Q)$ の文を $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ と枚挙する．これから $L^*(Q)$ の文の無矛盾な理論の拡大列 $T_0, T_1, \ldots$ を作っていく．

タイプの排除定理 in $L(Q)$ の証明 (2/4)

理論の拡大列 $T_0, T_1, \ldots$ の条件は次の通り：

1. $T_0 = T$
2. 各 T_m は $L^*(Q)$ の無矛盾な T の有限拡大
3. $\varphi_m \in T_{m+1}$ or $(\neg\varphi_m) \in T_{m+1}$
4. $\varphi_m \equiv \exists x\psi(x)$ かつ $\varphi_m \in T_{m+1}$ ならば，$\psi(c_p) \in T_{m+1}$ で c_p は T_m にも φ_m にも表れない定数
5. $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ が存在して，$(\neg\sigma(c_m)) \in T_{m+1}$

タイプの排除定理 in $L(Q)$ の証明 (3/4)

列の構成．T_m まで構成されたと仮定し，T_{m+1} を構成する．
$T_m = T \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ とし $\theta :\equiv \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_r$ とする．$c_0, \ldots, c_n$ を θ の中の C に属する定数全てとする．論理式 θ' を θ の各定数 c_i を x_i に置換し，先頭に $(\exists x_i)$ を付けて $(i \neq m)$ 得られるものとする．$(\exists x_m)\theta'$ は T と無矛盾．そこで定理の仮定より，ある $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ について $(\exists x_m)(\theta(x_m) \wedge \neg\sigma(x_m))$ は T と無矛盾．$\neg\sigma(c_m)$ を T_{m+1} に入れる．φ_m か $\neg\varphi_m$ のどちらかも無矛盾性を保ったまま T_{m+1} にいれる．もし，$\varphi_m \equiv (\exists x)\psi(x)$ が無矛盾ならば，$\psi(c_p)$ も T_{m+1} に入れる．

列の構成終わり．

タイプの排除定理 in $L(Q)$ の証明 (4/4)

$T := \bigcup_{n\in\omega} T_n$ は無矛盾かつ C は T の証拠集合なので，「弱完全性定理のための補題」より，T の弱モデル $(\mathcal{A}, q)$ があり，任意の元は C の定数の解釈である．構成より，$(\mathcal{A}, q)$ は Σ を排除している． ■

長さ ω の対角線論法で定理を証明した．可算個の Σ_n $(n \in \omega)$ の場合も証明もほぼ同じである (可算×可算=可算を使う！)．

目次

初等鎖

定義 (初等鎖)

$\langle \mathcal{A}_\alpha, q_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma}$ が初等鎖であるとは，任意の $\alpha < \beta < \gamma$ について，$(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha)$ が $(\mathcal{A}_\beta, q_\beta)$ の初等部分構造となることを言う．

初等鎖定理

定義 (初等鎖の和)

$\langle \mathcal{A}_\alpha, q_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma}$ が初等鎖であるとき，その和とは $(\mathcal{A}, q)$ であって，$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{A}_\alpha$ かつ

$$q = \{S \subseteq A : (\exists \alpha < \gamma)(\forall \beta \in [\alpha, \gamma))\ S \cap A_\beta \in q_\beta\}$$

なものを言う．

初等鎖定理

$\langle \mathcal{A}_\alpha, q_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma}$ は初等鎖とし，$(\mathcal{A}, q)$ をその和とする．このときすべての $\alpha < \gamma$ について，

$$(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{A}, q).$$

初等鎖定理

$\langle \mathcal{A}_\alpha, q_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma}$ は初等鎖とし，$(\mathcal{A}, q)$ をその和とする．このときすべての $\alpha < \gamma$ について，

$$(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{A}, q).$$

証明．論理式の複雑性に関する帰納法．$(Qx)\varphi$ の形以外は一階述語論理のときと同じ証明．

初等鎖定理

$\alpha < \gamma$ を固定する．

主張 $\mathcal{A} \models (Qx)\varphi$ ならば，$\mathcal{A}_\alpha \models (Qx)\varphi$.

$S = \{a \in A : \mathcal{A} \models \varphi(a)\}$ とおく．$\mathcal{A} \models (Qx)\varphi$ より $S \in q$. よって $\alpha' < \gamma$ があり，任意の $\beta \in [\alpha', \gamma)$ で $S \cap A_\beta \in q_\beta$ である．$\beta = \max(\alpha, \alpha')$ とおく．よって，帰納法の仮定と合わせて $\mathcal{A}_\beta \models (Qx)\varphi$ となる．$(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{A}_\beta, q_\beta)$ より $\mathcal{A}_\alpha \models (Qx)\varphi$. //

初等鎖定理

$\alpha < \gamma$ を固定する．

主張 $\mathcal{A} \models \neg(Qx)\varphi$ ならば，$\mathcal{A}_\alpha \models \neg(Qx)\varphi$.

$S = \{a \in A : \mathcal{A} \models \varphi(a)\}$ とおく．$\mathcal{A} \models \neg(Qx)\varphi$ より $S \notin q$. よって任意の $\alpha' < \gamma$ について，$\beta \in [\alpha', \gamma)$ が存在し，$S \cap A_\beta \notin q_\beta$ である．α' に α を代入する．すると $\mathcal{A}_\beta \models \neg(Qx)\varphi$ となる．$(\mathcal{A}_\alpha, q_\alpha) \prec (\mathcal{A}_\beta, q_\beta)$ より $\mathcal{A}_\alpha \models \neg(Qx)\varphi$. //

これで初等鎖定理が示された． ■

来週やるメインン補題

メイン補題

$(\mathcal{A}, q)$ を可算弱構造で，$L(Q)$ の公理すべてを満たすとする．L^* を L に $\mathcal{A}$ の元全てに対する定数記号を付与した言語，$\mathcal{A}$ を標準的に L^* 構造に拡大したものを $\mathcal{A}^*$ とする．$\varphi(x)$ を $L^*(Q)$ 論理式で $(\mathcal{A}^*, q) \models (Qx)\varphi(x)$ となるものとする．このとき次を満たす可算初等拡大 $(\mathcal{B}, r) \succ (\mathcal{A}, q)$ が存在する：

1. ある $b \in B \setminus A$ について $(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b]$.
2. どんな $L^*(Q)$ 論理式 $\psi(y)$ で，$(\mathcal{A}^*, q) \models \neg(Qy)\psi(y)$ なものについても，$\{a \in B : (\mathcal{B}^*, r) \models \psi[a]\} \subseteq A$.