実数の集合論で可算順序数の概念を使ういくつかの面白い例の紹介

後藤 達哉
2025 年 12 月 18 日 作成

概要

本記事は Mathematical Logic Advent Calendar 2025 の 12 月 18 日の記事である．連続体の基数不変量などの実数の集合論では，自然数の組合せ論，実数の組合せ論はよく使うが，ω_1 は出てくることが比較的少ないと思う．そのような中で，ω_1 を使う議論をいくつか紹介する．具体的には第 1 章で Laver 木と Lebesgue 外測度の関係，第 2 章で $\mathfrak{b} = \omega_1$ が非可算な meager additive set の存在を導くこと，第 3 章で Laver 強制法および Hechler 強制法の rank argument を紹介する．

目次

1 Laver 木と Lebesgue 外測度

Laver 木とは $\omega^{<\omega}$ の部分木 T であり，あるノード $s \in T$ があり，s の下では分岐はなく，s より上 (s を含む) のノードは全て無限分岐するものである．この s は T から一意に定まるから，それを $\mathrm{stem}(T)$ と書く．

Laver 木全部の集合を $\mathbb{L}$ と書く．

μ^* は Cantor 空間 2^ω の Lebesgue 外測度を表すものとする．

定理 1.1 (Pawlikowski [Paw96]). $\langle A_t : t \in \omega^{<\omega} \rangle$ を各 A_t が $A_t \subseteq 2^\omega, \mu^*(A_t) \leqslant a$ を満たし，かつ $A_t \subseteq \liminf_n A_{t^\frown n}$ を各 $t \in \omega^{<\omega}$ について満たす族とする．このとき

$$\mu^*(\bigcap_{T \in \mathbb{L}} \bigcup_{t \in T} A_t) \leqslant a$$

となる．

証明. 族 $\langle A_t^\alpha : \alpha < \omega_1, t \in \omega^{<\omega} \rangle$ を次のように帰納的に定める．

$$\begin{aligned} A_t^0 &= A_t \\ A_t^{\alpha+1} &= \liminf_n A_{t^\frown n}^\alpha \\ A_t^\gamma &= \bigcup_{\alpha<\gamma} A_t^\alpha \ (\gamma \text{ is limit}) \end{aligned}$$

仮定より A_t^α は α について単調増大で，かつ外測度はどれも $\leqslant a$ である．

よって，各 $t \in \omega^{<\omega}$ について $\alpha_t < \omega_1$ が取れて，$\mu^*(A_t^{\beta+1} \setminus A_t^{\beta}) = 0$ for every $\beta \geqslant \alpha_t$ となる．$\alpha = \sup_{t \in \omega^{<\omega}} \alpha_t$ と置く． したがって，

$$\mu^*(A_\varnothing^{\alpha+1} \cup \bigcup_{t \in T} (A_t^{\alpha+1} \setminus A_t^{\alpha})) \leqslant a$$

となる．今，次を主張する：

$$\bigcap_{T \in \mathbb{L}} \bigcup_{t \in T} A_t \subseteq A_\varnothing^{\alpha+1} \cup \bigcup_{t \in T} (A_t^{\alpha+1} \setminus A_t^{\alpha}). \tag{1}$$

この主張 (1) を示せば，定理の証明も終わる．そこで主張を示そう．$x \notin A_\varnothing^{\alpha+1} \cup \bigcup_{t \in T} (A_t^{\alpha+1} \setminus A_t^{\alpha})$ とする．木の列 $\langle T_i : i < \omega \rangle$ を作り，各 T_i は高さ i，各極大な元 $t \in T_i$ は $x \notin A_t^{\alpha+1}$ を満たすように作る．$T_0 = \{\varnothing\}$ とおけば，$x \notin A_\varnothing^{\alpha+1}$ より帰納法の基底ケースは問題ない．T_i まで構成できたとする．t が T_i の極大ノードのとき，$A_t^{\alpha+1}$ の定義より集合 $X_t = \{n : x \notin A_{t^\frown n}^{\alpha}\}$ は無限集合である．

$$T_{i+1} = T_i \cup \{t^\frown n : t \text{ は } T_i \text{ の極大ノード，} n \in X_t\}$$

とおく．$t^\frown n$ が T_{i+1} の極大ノードなら，$x \notin A_{t^\frown n}^{\alpha+1} \setminus A_{t^\frown n}^{\alpha}$ より，$x \notin A_{t^\frown n}^{\alpha+1}$ となり，帰納法の仮定は成り立ち続ける．最後に $T = \bigcup_i T_i$ と置けば，$x \notin \bigcup_{t \in T} A_t^{\alpha+1}$ なのでこれで証明できた． □

この定理は Laver 強制法が Lebesgue 外測度を保つことを示す際の重要なピースである．

2　$\mathfrak{b} = \omega_1$ は非可算 meager additive set の存在を導く

Cantor 空間の部分集合 $X \subseteq 2^\omega$ が meager additive であるとは，任意の meager 集合 H について $X + H$ もまた meager となることを意味する．ここで $X + H = \{x + h : x \in X, h \in H\}$ である．なお Cantor 空間の元同士の和は成分ごとの modulo 2 の和で定める．

meager additive な集合が可算集合しかないことが無矛盾なことが知られている．また，連続体仮説の下で非可算な meager additive な集合が存在することは比較的簡単に示せる．以下の定理はその仮定を弱めたものである．

定理 2.1 (Bartoszynski [Bar03])**.** $\mathfrak{b} = \omega_1$ ならば，非可算 meager additive set が存在する．

証明．$\mathfrak{b} = \omega_1$ を仮定する．すると列 $\langle f_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ であって $\leqslant^*$ の意味で単調増大かつ非有界な ω^ω の狭義単調増加関数からなるものがとれる．$2^{<\omega}$ の部分完全木を要素とする ω_1 木 $(T, \supseteq)$ を構成する．T_α を T のレベル α とする．次の条件を要請する．

(1) 任意の $\alpha < \beta < \omega_1$ と $n \in \omega$ と $p \in T_\alpha$ について，ある $q \in T_\beta$ があって，$q \subseteq p$ かつ $q \cap 2^n = q \cap 2^n$.
(2) 任意の $\alpha < \omega_1$ と $p \in T_{\alpha+1}$ について，有限個を除いた全ての自然数 n で $p \cap 2^{f_\alpha(n)} \leqslant 2^n$ が成り立つ．
(3) 任意の $\alpha < \omega_1$ について T_α は可算．

この T を下から順に構成しよう．

ベースステップ．$T_0 = \{2^{<\omega}\}$.

後続ステップ．T_α が構成されたとする．$p \in T_\alpha$ とする．次のような $\langle q_n : n \in \omega \rangle$ を取る．

(1) $q_n \subseteq p$ for every n.
(2) $q_n \cap 2^n = p \cap 2^n$ for every n.

(3) $[q_n] \cap [q_m] = \varnothing$ for every $n \neq m$.

(4) 任意の n について，有限個を除いた全ての k で $|q_n \cap 2^{f_\alpha(k)}| \leqslant 2^k$.

つまり，完全集合 $[p]$ の部分集合を可算個の完全集合 $[q_n]$ たちに分割しつつ，(2) のように q_n と p は下の方では変わらないようにし，(4) を満たすくらい各々が薄い木となるようにするのである．これは可能である．

各 $p \in T_\alpha$ についてこのような $\langle q_n : n \in \omega \rangle$ を取り，レベル $T_{\alpha+1}$ に置く．

極限ステップ．γ を極限順序数，T_α $(\alpha < \gamma)$ を構成済みと仮定する．$p \in \bigcup_{\alpha<\gamma} T_\alpha$ と $n \in \omega$ を固定する．$q = q(p, n)$ を以下のように定め，γ レベルにこの q を置く．列 $\langle \alpha_k, n_k, p_k : k \in \omega \rangle$ を構成して次を満たすようにする．$p_0 := p, n_0 := n$ とする．

(1) $p_k \in T_{\alpha_k}$,

(2) $\sup_k \alpha_k = \alpha$, $\lim_k n_k = \infty$,

(3) $p_{k+1} \subseteq p_k$,

(4) $p_{k+1} \cap 2^{n_k} = p_k \cap 2^{n_k}$.

数列 $\langle n_k : k \in \omega \rangle$ を十分増大度を大きくなるように以上の構成を行えば，$q := \bigcap_k p_k$ は完全木となる．

以上で木 T を構成できた．

各 $p \in T$ について $x_p \in [p]$ を選択し，$X = \{x_p : p \in T\}$ とおく．X の濃度が $\aleph_1$ になるように x_p たちを選ぶことが可能である．

この X が meager additive set であることを証明しよう．

H を meager set とする．よく知られた事実 (たとえば [Bla10] の Theorem 5.2) より $x_H \in 2^\omega$ と狭義単調増大関数 $f_H \in \omega^\omega$ が取れて，

$$H \subseteq \{x \in 2^\omega : \forall^\infty n \ \exists j \in [f_H(n), f_H(n+1)) \ x(j) \neq x_H(j)\}$$

となる．証明すべきことは $X + H$ が meager なことであるので，平行移動を施して，$x_H(k) = 0$ for all k を仮定して良い．$\langle f_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ は非有界な族であるので，ある $\alpha_0 < \omega_1$ が取れて，

$$\exists^\infty n \ \exists k \ f_{\alpha_0}(n) < f_H(k) < f_H(k + 2^n) < f_{\alpha_0}(n+1)$$

となる．

理由．背理法．全ての α について

$$\forall^\infty n \ \forall k \ [f_\alpha(n) \geqslant f_H(k) \text{ or } f_H(k + 2^n) \geqslant f_\alpha(n+1)]$$

と仮定する．各 $n_0, m \in \omega$ について関数 $G^{n_0}_m$ を

$$\begin{aligned} G^{n_0}_m(n_0) &= m \\ G^{n_0}_m(n+1) &= f_H(k_n + 2^n) + 1 \\ &\quad (\text{where } k_n = \min\{k : f_H(k) > G^{n_0}_m(n)\}) \end{aligned}$$

とおく．$G^{n_0}_m$ $(n_0, m \in \omega)$ を全部 dominate する G を取る．

$\alpha < \omega_1$ を固定する．背理法の仮定より $n_0 \in \omega$ が取れて，

$$\begin{aligned} &\forall n \geqslant n_0 \ \forall k \ f_\alpha(n+1) \leqslant f_H(k^*_n + 2^n) \\ &\quad (\text{where } k^*_n = \min\{k : f_H(k) > f_\alpha(n)\}) \end{aligned}$$

となる．$m := f_\alpha(n_0)$ とおく．n に関する帰納法で $\forall n \geqslant n_0 \ f_\alpha(n) \leqslant G^{n_0}_m(n)$ を示す．ベースケースは OK.

$f_\alpha(n) \leqslant G_m^{n_0}(n)$ を仮定すると $k_n^* \leqslant k_n$ が従う．よって

$$f_\alpha(n+1) \leqslant f_H(k_n^* + 2^n) \leqslant f_H(k_n + 2^n) < G_m^{n_0}(n+1)$$

となる．したがって，f_α は $G_m^{n_0}$ に dominate される．つまり G にも dominate される．

$\alpha < \omega_1$ は任意だったので，これは $\langle f_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ が非有界なことに矛盾．

$\langle n_i, k_i : i < \omega \rangle$ で

$$\forall i \ f_{\alpha_0}(n_i) < f_H(k_i) < f_H(k_i + 2^{n_i}) < f_{\alpha_0}(n_i + 1) \tag{2}$$

となるものを取る．

$p \in T_{\alpha_0+1}$ を固定する．$z_p \in 2^\omega$ を次のように定める．まず，与えられた十分大きな i について $p \cap 2^{f_{\alpha_0}(n_i)}$ の枚挙 $\langle s^i_j : j < 2^{n_i} \rangle$ を取る．z_p は各 s^i_j と区間 $[f_H(k_i + j), f_H(k_i + j)]$ 内で一致するように取るのである．各区間は (2) より重なっていないことに注意．どの区間にも入っていない添字での z_p の値は何でもいい．

$$G_p := \{x \in 2^\omega : \forall^\infty i \ x \text{ と } z_p \text{ は区間 } [f_{\alpha_0}(n_i), f_{\alpha_0}(n_i+1)) \text{ で agree しない }\}$$

とおく．各 G_p は meager である．今，$[p] + H \subseteq G_p$ を主張する．$x \in [p] + H$ とする．すると $y \in [p]$ がとれて，

$$\forall^\infty k \ x \text{ と } y \text{ は区間 } [f_H(k), f_H(k+1)) \text{ で agree しない}$$

となる．十分大きな i について，ある j があって，

$$y \restriction [f_H(k_i+j), f_H(k_i+j+1)) = s_i \restriction [f_H(k_i+j), f_H(k_i+j+1)) = z_p \restriction [f_H(k_i+j), f_H(k_i+j+1))$$

となるが，これは

$$x \restriction [f_H(k_i+j), f_H(k_i+j+1)) \neq z_p \restriction [f_H(k_i+j), f_H(k_i+j+1))$$

を含意する．よって区間をより広げた

$$x \restriction [f_{\alpha_0}(n_i), f_{\alpha_0}(n_i+1)) \neq z_p \restriction [f_{\alpha_0}(n_i), f_{\alpha_0}(n_i+1))$$

も成立する．これは $x \in G_p$ を意味する．

$X_{\alpha_0} = \{x_p : p \in \bigcup_{\alpha \leqslant \alpha_0} T_\alpha\}$ とおく (X の定義のところで選択した点のうち $\bigcup_{\alpha \leqslant \alpha_0} T_\alpha$ から来るもの全部)．X_{α_0} は可算集合なので，$X_{\alpha_0} + H$ は meager である．また，$\bigcup_{p \in T_{\alpha_0+1}} [p] + H \subseteq \bigcup_{p \in T_{\alpha_0+1}} G_p$ も meager set の可算和なので，meager である．したがって，

$$X + H \subseteq (X_{\alpha_0} + H) \cup \bigcup_{p \in T_{\alpha_0+1}} ([p] + H)$$

も meager となる． □

3 Laver 強制法と Hechler 強制法における rank argument

この節では強制法の知識を仮定する．

3.1 Laver 強制法

本節の内容は [BJ95] を参考にした．

第 1 節で考察した，Laver 木の集合 $\mathbb{L}$ に次の順序を入れる：$T' \leqslant T \iff T' \subseteq T$.

また次の順序も考える：$T' \leqslant_0 T \iff T' \leqslant T \wedge \mathrm{stem}(T') = \mathrm{stem}(T)$.

$T \in \mathbb{L}$ と $s \in T$ に対し $T_s = \{t : s \subseteq t \text{ or } t \subseteq s\}$ とおく．これは s より下にある分岐を全部刈り取ってできる新しい $\mathbb{L}$ の条件である．

$D \subseteq \mathbb{L}$ を開かつ稠密な集合とする．$T \in \mathbb{L}$ と $s \in T$ に対し，そのランク $r_T(s)$ を次で定める．

(1) $r_T(s) = 0$ となるのは $T' \leqslant_0 T_s$ が存在して $T' \in D$ となるとき．

(2) $r_T(s) \neq 0$ のとき，

$$r_T(s) = \min\{\alpha : \exists U \in [\omega]^\omega\ \forall n \in U\ r_T(s^\frown n) < \alpha\}.$$

任意の $s \in T$ に対して，$r_T(s)$ は定義される．実際，$r_T(s_0)$ が定義されない s_0 があるとしたら，$\{n : r_T(s^\frown n)$ が定義されている $\}$ が有限集合となる．すると帰納法により $S \in \mathbb{L}$, $S \leqslant T_{s_0}$ を作って，任意の $s \in S$ について $r_T(s)$ が定義されていないようにできる．$S' \leqslant S$ を $S' \in D$ なる元とする．しかし，すると $r_T(\mathrm{stem}(S')) = 0$ となって矛盾．

またランクに関する帰納法で $T' \leqslant T$ かつ $s \in T'$ のとき $r_T(s) \leqslant r_{T'}(s)$ もわかる．さらに T' と T で s より上を変えていない ($T_s = T'_s$) ときには，逆向きの不等号も言えて，$r_T(s) = r_{T'}(s)$ となる．

以下が Laver 強制法の pure decision と呼ばれる性質である．

定理 3.1. $A \in [\omega]^{<\omega}$ とし，$T \Vdash_{\mathbb{L}} \dot{a} \in A$ とする．すると $T' \leqslant_0 T$ と $a \in A$ が存在して $T' \Vdash \dot{a} = a$ となる．

証明. $D = \{T' \in \mathbb{L} : T$ は $\dot{a}$ の値を決定している $\}$ とおく．D は開かつ稠密な集合である．D に関するランク関数を r で表す．$r_T(\mathrm{stem}(T))$ に関する帰納法で定理を示す．

$r_T(\mathrm{stem}(T)) = 0$ ならば，r の定義より結論は明らか．$r_T(\mathrm{stem}(T)) = \alpha > 0$ としよう．するとある $U \in [\omega]^\omega$ があって，全ての $n \in U$ で $r_T(\mathrm{stem}(T)^\frown n) < \alpha$．よって，定理の前の注意を使うことで，$r_{T_{\mathrm{stem}(T)^\frown n}}(\mathrm{stem}(T)^\frown n) < \alpha$ でもある．帰納法の仮定より各 $n \in U$ について $T^n \leqslant_0 T_{\mathrm{stem}(T)^\frown n}$ があって T^n は $\dot{a}$ を決定している．必要に応じて U を縮めることで，T^n $(n \in U)$ が決定している $\dot{a}$ の値は一定だとしてよい (A は有限集合なことに注意)．そこで $T' = \bigcup_{n \in U} T^n$ とおけばこれが所望の条件である． □

3.2 Hechler 強制法

本節の内容は [Bre09] を参考にした．

記号の乱用で自然数の無限集合 A に対して $A(n)$ でその小さい方から数えて n 番目の要素を表す．

Hechler 強制法を $\mathbb{D} = \{(s, \varphi) : s \in \omega^{<\omega}, \varphi\colon \omega^{<\omega} \to \omega\}$ かつ $(t, \psi) \leqslant (s, \varphi)$ を $s \subseteq t$, ψ は φ を everywhere dominate する，かつ任意の $i \in |t| \setminus |s|$ について $\varphi(t \restriction i) \leqslant t(i)$ と定める．

$\dot{A}$ を ω の無限部分集合の $\mathbb{D}$-name とする．$s \in \omega^{<\omega}$ と $n, k \in \omega$ について，s が $\dot{A}(n) = k$ を好むとは，第一成分が s の条件であって，$\dot{A}(n) \neq k$ を強制するものは存在しないことを意味する．

ランク $r_n(s)$ を次で定める．

(1) $r_n(s) = 0$ iff ある k について，s が $\dot{A}(n) = k$ を好む

(2) $r_n(s) \neq 0$ のとき $r_n(s) = \min\{\alpha : \exists^\infty l\ r_n(s^\frown l) < \alpha\}$.

$r_n(s)$ は全ての n, s について定まる．実際，$r_n(s)$ が未定義な s があったとしよう．するとほとんど全ての l について $r_n(s^\frown l)$ も未定義である．したがって，次のような $\varphi\colon \omega^{<\omega} \to \omega$ を構成できる：$s \subseteq t$ かつ，$\varphi(t \restriction i) \leqslant t(i)$ for all $i \in |t| \setminus |s|$ ならば，$r_n(t)$ は未定義．条件 (s, φ) を考えよう．条件

$(t,\psi) \leqslant (s,\varphi)$ で，$\dot{A}$ の第 n 要素がある k であることを強制するものを取る．すると $r_n(t) = 0$ である．しかし，$r_n(t)$ は未定義であったので矛盾．

自然数の無限集合 A, B に対して，B が A を split するとは，$B \cap A$ と $B \setminus A$ の両方が無限集合となることを意味する．

定理 3.2. $\dot{A}$ を ω の無限部分集合の $\mathbb{D}$-name とする．すると $\langle A_i : i \in \omega \rangle$ があって，$B \in [\omega]^\omega$ が全ての A_i を split するならば，$\Vdash_{\mathbb{D}} B$ は $\dot{A}$ を split する．

証明．$s \in \omega^{<\omega}$ とする．もし $r_n(s) = 0$ となる n が無限個ある場合は，そのような n について k_n を見つけ，s が $\dot{A}(n) = k_n$ を好むようにする．$k_n \geqslant n$ であることに注意．$A_s = \{k_n : r_n(s) = 0\}$ とおく．

$s \in \omega^{<\omega}, n \in \omega$ とし，$r_s(n) = 1$ と仮定する．すると無限個の l があって，$r_n(s^\frown l) = 0$ である．そのような各 l について，$s^\frown l$ が $\dot{A}(n) = k^{s,n,l}$ を好むようにとる．$A^{s,n} = \{k^{s,n,l} : l \in \omega, r_n(s^\frown l) = 0\}$ とおく．$A^{s,n}$ は無限集合である．実際，各 $k \in \omega$ について $\{l : k^{s,n,l} = k\}$ は有限集合となる．なぜなら，もしこれが無限集合だったら，k を witness として $r_n(s) = 0$ となるからである．

さて，もし B が全ての A_s, $A^{s,n}$ たちを split するなら $\Vdash$ “B は $\dot{A}$ を split する” を示そう．

(s,φ) を条件とし，$m \in \omega$ とする．次を示す必要がある：$(t,\psi) \leqslant (s,\varphi)$ と $m_0, m_1 \geqslant m$ があり，$m_0 \in B, m_1 \notin B$ かつ $(t,\psi) \Vdash m_0, m_1 \in \dot{A}$.

まず，無限個の n が存在して，$r_n(s) = 0$ だと仮定しよう．すると $B \cap A_s$ と $A_s \setminus B$ はともに無限集合だから，$m_0, m_1 \geqslant m$ で $m_0 \in B \cap A_s$ かつ $m_1 \in A_s \setminus B$ なものを見つけられる．A_s の定義より，ある n_0, n_1 があって s は $\dot{A}(n_0) = m_0$ と $\dot{A}(n_1) = m_1$ の両方を好む．すると $(s,\varphi) \nVdash \dot{A}(n_0) \neq m_0 \wedge \dot{A}(n_1) \neq m_1$ なので，ある $(t,\psi) \leqslant (s,\varphi)$ が取れて，$(t,\psi) \Vdash m_0, m_1 \in \dot{A}$.

次に，有限個を除いた全ての n で $r_n(s) > 0$ だと仮定する．$r_n(s) > 0$ なる $n \geqslant m$ を固定する．このとき，s の延長 t であって，$\varphi(t \restriction i) \leqslant t(i)$ for all $i \in |t| \setminus |s|$ かつ $r_n(t) = 1$ となるものを取ることができる．

実際，これは $r_n(s)$ に関する帰納法で示される．$r_n(s) = 1$ なら $s = t$ と取ればよい．$r_n(s) > 1$ ならば，$l \in \omega$ であって，$l \geqslant \varphi(s)$ かつ $1 \leqslant r(s^\frown l) < r_n(s)$ となるものを取れる．帰納法の仮定により $s^\frown l$ は所望の t に延長できる．

さて，$B \cap A^{t,n}$ は無限集合だから，$l \geqslant \varphi(t)$ であって，$k^{t,n,l} = m_0$ であって，$m_0 \in B \cap A^{t,n}$ となるものが取れる．

よって，$t^\frown l$ は $\dot{A}(n) = m_0$ を好む．ゆえに，条件 $(u,\psi) \leqslant (s,\varphi)$ を見つけて，$(u,\psi) \Vdash m_0 \in \dot{A}$ となる．

m_0 だけ見つけたが，m_0, m_1 両方を見つけることも同じ議論で確かめられる．[TODO: ここをちゃんと書く] □

参考文献

[Bar03] T. Bartoszynski. “Remarks on small sets of reals”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 131.2 (2003), pp. 625–630.

[BJ95] T. Bartoszynski and H. Judah. *Set Theory: on the structure of the real line.* CRC Press, 1995.

[Bla10] A. Blass. “Combinatorial cardinal characteristics of the continuum”. *Handbook of set theory.* Springer, 2010, pp. 395–489.

[Bre09] J. Brendle. “Forcing and the structure of the real line: the Bogotá lectures”. *Lecture notes* (2009).

[Paw96] J. Pawlikowski. “Laver’s forcing and outer measure, Set theory (Boise, ID, 1992–1994), 71–76”. *Contemp. Math* 192 (1996).