Goldsternの原理

後藤 達哉

神戸大学システム情報学研究科

2025年2月21日
ロジックウィンタースクール III (理化学研究所) において

本研究は JSPS 科研費 JP22J20021 の助成を受けたものである

目次

目次

実数の集合論とは

実数直線という難しい構造を集合論的視点から解き明かす．

その中にも「基数不変量」的，「記述集合論」的視点がある．

重要な 3 概念：数列の支配関係，Lebesgue 測度，Baire の類．

数列の支配関係は，$x, y \in \omega^\omega$ について

$$x \leqslant^* y \iff \text{有限個を除いたすべての } n \text{ で } x(n) \leqslant y(n)$$

で定められる．

Goldstern の定理

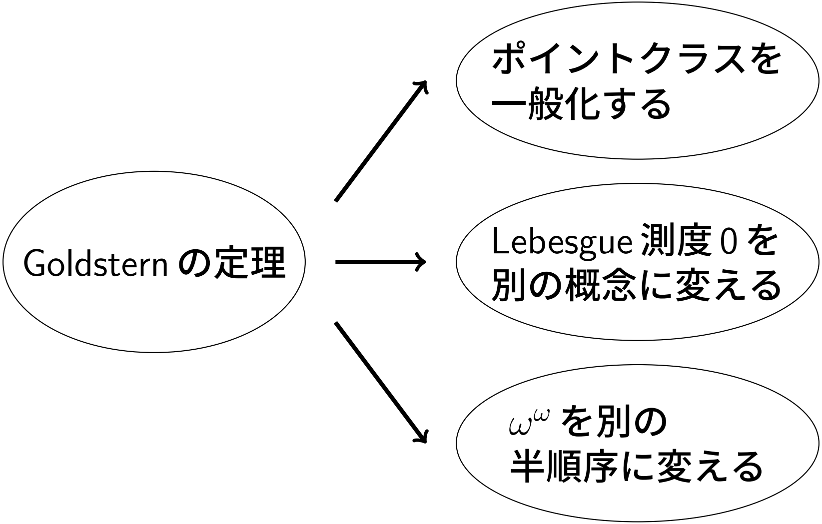
1993 年，Martin Goldstern は次の定理を証明した．

Photo of Martin Goldstern by Andrés Villaveces; CC BY-SA 4.0

Goldstern の定理

$\langle A_x : x \in \omega^\omega \rangle$ を ω^ω の元で添字付けられた $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度 0 な部分集合の族とする．
単調性条件 $(\forall x, x' \in \omega^\omega)(x \leqslant^* x' \Rightarrow A_x \subseteq A_{x'})$ を仮定する．
また，$\{(x, y) \in \omega^\omega \times \mathbb{R} : y \in A_x\}$ が $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合であると仮定する．
このとき $\bigcup_{x \in \omega^\omega} A_x$ も Lebesgue 測度 0 である．

Goldsternの定理の一般化



Goldstern の定理の一般化

Goldstern の定理

ポイントクラスを一般化する

Lebesgue 測度 0 を別の概念に変える

ω^ω を別の半順序に変える

原理 GP(Γ)

定義

Γ をポイントクラスとする．このとき GP(Γ) とは次の主張である: $\langle A_x : x \in \omega^\omega \rangle$ を ω^ω の元で添字付けられた $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度 0 な部分集合の族とする．$(\forall x, x' \in \omega^\omega)(x \leqslant^* x' \Rightarrow A_x \subseteq A_{x'})$ を仮定する．また，$\{(x, y) \in \omega^\omega \times \mathbb{R} : y \in A_x\}$ が Γ に属すると仮定する．このとき $\bigcup_{x \in \omega^\omega} A_x$ も測度 0 である．

Goldstern の定理は GP($\boldsymbol{\Sigma}^1_1$) が成り立つことを主張している．

主定理

記号 “all” は空間のすべての部分集合のなすポイントクラスを表す．

定理 A (G.) GP(all) は ZFC から独立．

定理 B (G.) GP($\mathbf{\Pi}^1_1$) は正しい．

定理 A：他の正則性条件と同じように選択公理を使って無理やりに ZFC で GP(all) の反例を構成できるかと予想していたが，実際にはそうでないところが面白い．
定理 B：GP($\mathbf{\Delta}^1_2$) は証明できないので，これおよび GP($\mathbf{\Sigma}^1_1$) が最適な結果である．

目次

一様分布

ほぼすべての無限ビット列においてそこに 0 の出てくる割合は $1/2$ に漸近していく：

$$(\tilde{\forall} x \in 2^{\omega}) \lim_{n \to \infty} \frac{|\{i \in n : x(i) = 0\}|}{n} = \frac{1}{2}.$$

ここに $(\tilde{\forall} x \in 2^{\omega})$ は「Lebesgue 測度の意味のほぼ全ての x について」の意味．

一様分布

1 より大きい長さ k の有限ビット列でも自然にこのことは一般化され，

$$(\forall k \in \omega)(\tilde{\forall} x \in 2^\omega)$$
$$\lim_{n\to\infty} \max_{w\in\{0,1\}^k} \left| \frac{|\{i \in n : \langle x(i), \ldots, x(i+k-1)\rangle = w\}|}{n} - \frac{1}{2^k} \right| = 0.$$

一様分布

$d_k(x,n) = \max_{w\in\{0,1\}^k} \left| \frac{|\{i\in n:\langle x(i),\dots,x(i+k-1)\rangle = w\}|}{n} - \frac{1}{2^k} \right|$ とおく．

$f \in \omega^\omega$ とする．x が f について一様分布であるという概念を

$$\lim_{n\to\infty} 2^{f(n)} d_{f(n)}(x,n) = 0.$$

で定める．任意の $k \in \omega$ について x が定数関数 k に関して一様分布なことは x が正規数なことを含意する．f の増大度はどこまで高められるか？

定理 (Flajolet-Kirschenhofer-Tichy, Grill) f について次は同値．

- ほぼ全ての x は f-一様分布．
- (条件 2) $\lim_{n\to\infty} \lfloor \log_2(n) - \log_2(\log_2(n)) - f(n) \rfloor = \infty$.

一様分布

では、次の集合

$$R := \{x \in 2^\omega : \text{条件 2 を満たす全ての } f \text{ で } x \text{ は } f\text{-一様分布}\}$$

の測度はどうなるか？
個々の条件 2 を満たす f について $R_f := \{x : x \text{ は } f\text{-一様分布}\}$ は測度 1 だが R はこれら R_f たちの (連続体濃度個の) 共通部分を取っているので，この測度が何になるかは非自明.

定理 (Goldstern) R の測度は 1.

この定理は GP(Borel) を使うことで証明された.

問題および疑問

演習問題 $f(n) > \log_2 n$ なら $R_f = \varnothing$ を示せ.

疑問 R の具体的な元はあるか.

目次

splitting number の定義

自然数の無限集合 A, B について A が B を**分割する**とは，

$$|B \cap A| = |B \setminus A| = \aleph_0$$

を満たすこと．自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}$ について

- $\mathcal{S}$ が **splitting family**
  $$:\Longleftrightarrow\ (\forall B \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{S})(A \text{ が } B \text{ を分割する})$$

次の $\mathfrak{s}$ を splitting number という：

- $\mathfrak{s} := \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ は splitting family}\}$

splitting* game

集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ を固定．次のゲームを $\mathcal{A}$ に関する **splitting* game** と呼ぶ:

プレイヤー I	i_0		i_1		$\ldots$	
プレイヤー II		j_0		j_1		$\ldots$

$\langle i_0, i_1, \ldots, i_k, \ldots \rangle$ と $\langle j_0, j_1, \ldots, j_k, \ldots \rangle$ はどちらも $\{0, 1\}$ の元の列．
プレイヤー II が勝つのはプレイヤー I が有限回しか 1 を言わなかったとき，または，

$$\{k \in \omega : j_k = 1\} \text{ は } \mathcal{A} \text{ の元でかつ } \{k \in \omega : i_k = 1\} \text{ を分割する}$$

となるとき．

splitting* game に関する基数不変量の定義

定義

$$\mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega), \text{プレイヤー I が } \mathcal{A} \text{ に関する splitting* game で必勝戦略を持たない}\}$$

$\mathbf{s} \leqslant \mathbf{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*}$ はすぐにわかる．

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*}$ の上界

定理 (Cruz Chapital–G.–林–山添)

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

ここで

$\mathrm{non}(\mathcal{N}) := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq 2^\omega, \mathcal{A}$ は Lebesgue 測度 0 ではない集合$\}$.

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ の証明

方針. プレイヤー I の戦略 σ を固定したとき次の集合が測度 0 であればよい:

$$\{x \in 2^\omega : \text{戦略 } \sigma \text{ はプレイ } x \text{ に splitting* game で勝つ}\}$$

この集合の測度を区間分割ごとの集合の和集合に分けて Goldstern の定理を使って計算する．区間分割ごとの集合の測度の計算は有限集合の数え上げに帰着され，解くことができる．

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ の証明

IP を ω の区間への分割全部の集合とする．$\bar{I}, \bar{J} \in \mathrm{IP}$ について

$\bar{I} \leqslant^* \bar{J} :\Leftrightarrow$ 有限個を除いて全ての m についてある n がありて $I_n \subseteq J_m$.

と定める．Goldstern の定理の IP を使って言い換えられる．

定理 $A \subseteq \mathrm{IP} \times 2^\omega$ を $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 集合とする．セクション $A_{\bar{I}}$ はどの $\bar{I} \in \mathrm{IP}$ についても測度 0 とする．任意の $\bar{I}, \bar{J} \in \mathrm{IP}$ について，$\bar{I} \leqslant^* \bar{J}$ ならば $A_{\bar{I}} \subseteq A_{\bar{J}}$ とする．このとき $\bigcup_{\bar{I} \in \mathrm{IP}} A_{\bar{I}}$ も測度 0.

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ の証明

補題 $a < b < \omega$ とする．$\bar{I} = \langle I_n : a \leqslant n < b \rangle$ を連続した ω 内の区間の列とする．$M := \max I_{b-1} + 1$ とおく．$\sigma\colon \{0,1\}^{<M} \to 2$，$e \in 2$ とする．次の集合

$$B^{\bar{I}}_e(\sigma) = \{x \in \{0,1\}^M : (\forall n \in [a,b))[(\exists k \in I_n)(\sigma(x \upharpoonright k) = 1), \text{ and } (\forall k \in I_n)(\sigma(x \upharpoonright k) = 1 \to x(k) = e)]\}.$$

について $\dfrac{|B^{\bar{I}}_e(\sigma)|}{2^M} \leqslant \dfrac{1}{2^{b-a}}$ を得る．

「プレイヤー I の戦略 σ がプレイ x に勝つ $\iff$ プレイヤー I は無限回 1 を言い，プレイヤー I は $x^{-1}(\{1\})$ のほとんど部分集合または $x^{-1}(\{0\})$ のほとんど部分集合を言う」に注意すれば，自然な集合を考えていることがわかる．

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ の証明

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ を測度 0 でない集合で濃度 $\mathrm{non}(\mathcal{N})$ のものとする．プレイヤー I が $\mathcal{A}$ に関する splitting* game で必勝戦略を持たないことを示せばよい．プレイヤー I の戦略 $\sigma : 2^{<\omega} \to 2$ を固定する．
$\bar{I} \in \mathrm{IP}$ と $e \in 2$ について

$$C^{\bar{I}}_e = \bigcup_{a\in\omega} \bigcap_{b>a} \{x \in 2^\omega : x \restriction (\min I_b) \in B^{\bar{I}\restriction[a,b)}_e(\sigma)\}.$$

とおくと補題より集合 $C^{\bar{I}}_e$ は測度 0 である．

$\mathfrak{s}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{game}^*} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ の証明

次の包含を得る．

$$\begin{aligned}\{x \in 2^\omega : \text{戦略}\,\sigma\,\text{はプレイ}\,x\,\text{に勝つ}\}\\ \subseteq \bigcup_{\bar{I} \in \mathrm{IP}} C^{\bar{I}}_0 \cup \bigcup_{\bar{I} \in \mathrm{IP}} C^{\bar{I}}_1.\end{aligned}$$

$e \in 2$ ごとに，$\bar{I} \leqslant^* \bar{J}$ ならば $C^{\bar{I}}_e \subseteq C^{\bar{J}}_e$ であり，また集合 $\{(\bar{I}, x) : x \in C^{\bar{I}}_e\}$ は Borel．そこで Goldstern の定理より $\bigcup_{\bar{I} \in \mathrm{IP}} C^{\bar{I}}_e$ は測度 0．
よって $x \in \mathcal{A}$ が取れてこの集合を避ける．これは σ が $\mathcal{A}$ に関する splitting* game の必勝戦略でないことを意味する． □

まとめと疑問

Goldstern の原理という数列の増大度と Lebesgue 測度の両方に関係する原理を紹介した．

今回見た応用ではどちらも GP(Borel) で十分だった．GP($\mathbf{\Sigma}^1_1$) や GP($\mathbf{\Pi}^1_1$) が真に効く応用例は何か無いだろうか．

参考文献

[CGHY24] Jorge Antonio Cruz Chapital, Tatsuya Goto, Yusuke Hayashi, and Takashi Yamazoe. *Game-theoretic variants of splitting number*. 2024. arXiv: 2412.19556 [math.LO].

[FKT88] Philippe Flajolet, Peter Kirschenhofer, and Robert F Tichy. "Deviations from uniformity in random strings". In: *Probability Theory and Related Fields* 80.1 (1988), pp. 139–150.

[Gol93] Martin Goldstern. "An Application of Shoenfield's Absoluteness Theorem to the Theory of Uniform Distribution.". In: *Monatshefte für Mathematik* 116.3-4 (1993), pp. 237–244.

[Got22] Tatsuya Goto. *Goldstern's principle about unions of null sets*. 2022. arXiv: 2206.08147 [math.LO].

[Gri92] Karl Grill. "A note on randomness". In: *Statistics & probability letters* 14.3 (1992), pp. 229–233.