Davies–Rogers による奇妙な Hausdorff 測度の構成

後藤 達哉
2024 年 12 月 15 日 作成 / 2025 年 1 月 3 日 更新

概要

Hausdorff 測度は，たとえば Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の中で 1 次元の曲線の長さ，2 次元の曲面の面積などを測ることができて便利な対象である．しかも，一般に正の実数 $\alpha > 0$ に対して，集合の可算被覆の各コンポーネントの直径の α 乗の総和で測度を定義することで，いわば α 次元の測度が定義でき，これにより無理数をも値に持つ次元を考察することができる．これはフラクタル幾何学の最も基本的な道具である．

さて，Hausdorff 測度はより一般に定義することができ，α 乗以外の関数 f を使っても良い．このとき使う関数 f をゲージ関数という．f が doubling という良い性質を持っていると，次のことが言える：f-Hausdorff 測度が無限大の解析集合は必ず f-Hausdorff 測度が正かつ有限な部分集合が取れる (Howroyd の定理)．Davies–Rogers が与えたのは，距離空間と doubling でないゲージ関数の一例で，Howroyd の定理から doubling の仮定を外したときの反例を与えるものである．このノートでは，Davies–Rogers の例を詳しく見る．

目次

1 準備

定義 1.1. $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ が**ゲージ関数**であるとは，f が広義単調増加，右連続，$f(0) = 0$ を満たすことを言う．

定義 1.2. (X, d) を距離空間，f をゲージ関数，$\delta > 0$ を実数とする．$A \subseteq X$ に対し X の部分集合の列 $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ が A の δ 被覆であるとは，

$$A \subseteq \bigcup_n C_n \text{かつ} (\forall n)[\operatorname{diam}(C_n) \leqslant \delta]$$

を満たすことを言う．$A \subseteq X$ について

$$\mathcal{H}^f_{X,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \omega} f(\operatorname{diam}(C_n)) : \langle C_n : n \in \omega \rangle \text{ は } A \text{ の } \delta \text{ 被覆} \right\}$$

と定義して，A の **Hausdorff 測度の δ 近似**という．

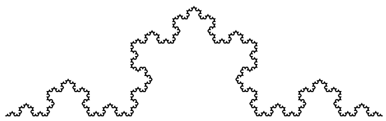
$$\mathcal{H}^f_X(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^f_{X,\delta}(A)$$

と定義して，A の **Hausdorff 測度**という．

注意 1.3. Hausdorff 測度の δ 近似 $\mathcal{H}^f_\delta$ および Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^f$ は外測度である．また，Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^f$ は Borel 集合を可測にする．

例 1.4. n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ における n 次元 Lebesgue 外測度とゲージ関数 $f(x) = x^n$ に関する Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^f_{\mathbb{R}^n}$ は定数倍を除いて等しい．また，たとえば $\mathbb{R}^n$ においてゲージ関数 $f(x) = x$ が定める Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^f_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ の中にある曲線の長さを定義する．

例 1.5. 次の図のような「Koch 曲線」と呼ばれる Euclid 平面内の図形はゲージ関数 $f(x) = x$ については無限大の Hausdorff 測度を取る．すなわち曲線の長さは無限大である．が，$r = \log 4/\log 3 = 1.26\cdots$ についてゲージ関数 $f(x) = x^r$ で Hausdroff 測度は正かつ有限である．



(正確に述べるとこの図は Koch 曲線の有限近似である．)

この例に一端が現れているが，フラクタル幾何学という分野では Hausdorff 測度はもっとも重要な概念の一つである．

注意 1.6. 任意の距離空間 (X, d)，ゲージ関数 f，実数 $\delta > 0$ に対して，$\mathcal{H}^f(A) = 0$ と $\mathcal{H}^f_\delta(A) = 0$ は同値である．

定義 1.7. ゲージ関数 f が doubling であるとは，ある $C > 0$ があって，任意の $x > 0$ について，$f(2x) < Cf(x)$ となることを言う．

次が顕著な定理である．

定理 1.8 (Howroyd)**.** (X, d) を解析的な距離空間，f を doubling なゲージ関数とし，$\mathcal{H}^f(X) > 0$ とする．するとコンパクト集合 $K \subseteq X$ が存在し，$0 < \mathcal{H}^f(X) < \infty$ となる．

2 Davies–Rogers の例

Davies と Rogers は doubling という仮定を外すと Howroyd の定理はもはや成り立たないことを示した．

定理 2.1. あるコンパクト距離空間 (X, d) と (doubling でない) ゲージ関数 f の組で，次を満たすものが存在する：$\mathcal{H}^f(X) = \infty$ だが，どんな $A \subseteq X$ についても，$\mathcal{H}^f(A) = 0$ または $\mathcal{H}^f(A) = \infty$ である．

2.1 グラフ理論的補題

グラフの部分集合は，その中のどの 2 点も結ばれていないとき独立部分集合というのであった．

補題 2.2. $n > 0$ を整数とする．このとき有限グラフ G が存在して次の性質が成り立つ：

(1) G は n 個の独立部分集合に分割することはできない．

(2) 任意の関数 $w\colon G \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ に対して，独立部分集合 $H \subseteq G$ が存在して，

$$\sum_{g\in H} w(g) \geqslant \frac{1}{4}\sum_{g\in G} w(g)$$

となる．

注意 2.3. $n > 0$ に対する補題のグラフ G は，次の性質を満たす：

$$|G| \geqslant \frac{4}{3}n.$$

実際, 任意の $g \in G$ に対して $w(g) = 1$ と定めることにより, 独立部分集合 $H \subseteq G$ があって, $|H| \geqslant \frac{1}{4}|G|$ となる．すると，(1) より $G \setminus H$ は n 個以上元を持つ必要がある．よって，$n \leqslant |G \setminus H| \leqslant \frac{3}{4}|G|$ なので結論を得る．

補題 2.2 の証明. n は十分大きいと仮定してよく，特に $n > 2$ としてよい．$\mathbb{R}^n$ において G を次のような条件を満たす極大な集合とする：G は $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルからなり，互いの距離が $\varepsilon := 1/(2\sqrt{n})$ より大きい．極大性より，次がわかる：

$$\text{もし } \|h\| = 1 \text{ ならばある } g \in G \text{ について } \|h - g\| \leqslant \varepsilon.$$

G を頂点集合とし，次のように辺を定めてグラフを作る．

$$g \text{ と } g' \text{ の間に辺がある} \iff \|g - g'\| \geqslant 2 - \varepsilon^2.$$

このグラフ G が所望のものなことを示そう．

(1). G が n 個の部分集合 $G_1, \dots, G_n$ に分割されたとする．このとき，そのうちの一つは独立でない，すなわち辺が張られた 2 頂点を見つけられることを示す．$\nu = 1, \dots, n$ に対して

$$H_\nu = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1, \|h - g\| \leqslant \varepsilon \text{ for some } g \in G_\nu\}$$

とおく．閉集合 H_ν $(\nu = 1, \dots, n)$ たちは $S^{n-1} = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$ を被覆するので，Lusternik–Schnirelmann–Borsuk の定理より，その中の一つ H_ν は対蹠点 $\pm h$ を持つ．$\pm h \in H_\nu$ より，ある $g, g' \in G_\nu$ があって，$\|g - h\|, \|g' + h\| \leqslant \varepsilon$ となる．このとき

$$\begin{aligned}
\|g - g'\| &\geqslant (g - g') \cdot h \\
&= \frac{1}{2}(-(g-h)^2 - (g'+h)^2 + g^2 + {g'}^2 + 2h^2) \\
&\geqslant \frac{1}{2}(-\varepsilon^2 - \varepsilon^2 + 4) \\
&= 2 - \varepsilon^2
\end{aligned}$$

となる．

(2) ある $g \in G$ について $w(g) > 0$ と仮定して良い．そこで，$\sum_{g\in G} w(g) = 1$ と仮定しても良い．よって独立部分集合 $H \subseteq G$ であって，$\sum_{g\in H} w(g) \geqslant \frac{1}{4}$ なものを見つければよい．

各単位ベクトル x について

$$H(x) = \{g \in G : g \cdot x \geqslant \varepsilon\}$$

とおく．すると，$g \in H(x)$ について

$$\|g - \varepsilon x\|^2 = g^2 - 2\varepsilon g \cdot x + \varepsilon^2 x^2 \leqslant 1 - \varepsilon^2,$$

よって，

$$\|g-\varepsilon x\| \leqslant (1-\varepsilon^2)^{1/2}$$

を得る．したがって，$g, g' \in H(x)$ のとき

$$\|g-g'\| \leqslant \|g-\varepsilon x\| + \|g'-\varepsilon x\| \leqslant 2(1-\varepsilon^2)^{1/2} \leqslant 2-\varepsilon^2$$

を得る．したがって，$H(x)$ は必ず独立集合となる．ゆえに, 単位ベクトル x があって, $\sum_{g\in H(x)} w(g) \geqslant \frac{1}{4}$ となることを示せば十分.

σ^{n-1} を球面 S^{n-1} の通常の測度とする．すると

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \sum_{g\in H(x)} w(g) d\sigma^{n-1}(x) &= \sum_{g\in H(x)} \int_{S^{n-1}} w(g) d\sigma^{n-1}(x) \\
&= \sum_{g\in G} \left(w(g) \int_{g\cdot x \geqslant \varepsilon} d\sigma^{n-1}(x) \right) \\
&= \int_{h\cdot x\geqslant\varepsilon} d\sigma^{n-1}(x).
\end{aligned}$$

ここで最後の $\int_{g\cdot x\geqslant\varepsilon} d\sigma^{n-1}(x)$ の値は g の取り方によらないので，$h \in S^{n-1}$ を一つ固定した.

よって，集合 C を $C = \{x \in S^{n-1} : h\cdot x \geqslant \varepsilon\}$ で定めると，最後の式は $\sigma^{n-1}(C)$ である．したがって，ある $x \in S^{n-1}$ が存在し,

$$\sum_{g\in H(x)} w(g) \geqslant \frac{\sigma^{n-1}(C)}{\sigma^{n-1}(S^{n-1})}$$

となる．今，$\sigma^{n-1}(S_{n-1})$ および $\sigma^{n-1}(C)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\sigma^{n-1}(S_{n-1}) &= \int_{-1}^{1} \sigma^{n-2}(S^{n-2})(1-x^2)^{(n-3)/2} dx \\
&= \frac{n}{n-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)}\sigma^{n-2}(S^{n-2}), \\
\sigma^{n-1}(C) &= \int_{\varepsilon}^{1} \sigma^{n-2}(S^{n-2})(1-x^2)^{(n-3)/2} dx \\
&= \frac{1}{2}\sigma^{n-1}(S^{n-1}) - \int_{\varepsilon}^{1} \sigma^{n-2}(S^{n-2})(1-x^2)^{(n-3)/2} dx \\
&= \frac{1}{2}\sigma^{n-1}(S^{n-1}) - \varepsilon\sigma^{n-2}(S^{n-2})
\end{aligned}$$

となる．ただし，第 1 行から第 2 行への変形は $t = x^2$ の置換積分やベータ関数の定義式，ベータ関数とガンマ関数の公式を使った．したがって，

$$\frac{\sigma^{n-1}(C)}{\sigma^{n-1}(S^{n-1})} \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{\pi}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)$$

となる．Stirling の近似により，上の式は近似的に

$$\frac{1}{2} - \varepsilon(n/2\pi)^{1/4} = \frac{1}{2} - (1/8\pi)^{1/2} > \frac{1}{4}$$

となる．したがって，十分大きい n に対して

$$\frac{\sigma^{n-1}(C)}{\sigma^{n-1}(S^{n-1})} \geqslant \frac{1}{4}$$

となる． □

2.2 構成

$n > 0$ に対して補題 2.2 で定まるグラフを $G(n)$ と書くことにする．

列 $\langle n_i, G_i, N_i : i \geqslant 1 \rangle$ を次のように定める．ただし n_1 は任意に選んで固定する．

$$\begin{aligned} G_i &= G(n_i) \\ N_i &= |G_i| \\ n_i &= 2N_{i-1} \end{aligned}$$

最後の式より

$$\frac{N_1 \dots N_{i-1}}{n_1 \dots n_i} \to 0 \text{ as } i \to \infty$$

なことに注意する．集合 Ω を

$$\Omega = \prod_{i \geqslant 1} G_i$$

で定める．Ω 上の距離 ρ を次で定める：$x, y \in \Omega, x \neq y$ に対して $x(i) \neq y(i)$ なる最小の i を取ったとき

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 2^{-i+1} & (\text{もし } x(i) \text{ と } y(i) \text{ がグラフ } G_i \text{ においてつながっているとき}) \\ 2^{-i} & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

ρ は距離関数であることは容易に確認できる．$d(x,y) = 2^{-i}$ で定まる距離とは 2 倍しかずれないので，(Ω, ρ) と (Ω, d) は Lipschitz 同型である．したがって，(Ω, ρ) は完備距離空間であり，Cantor 空間と同相である．

ゲージ関数 h を次で定める：

$$h(0) = 0, h(2^{-i}) = (n_1 \dots n_i)^{-1} \text{ (for } i \geqslant 0).$$

ただしこれら以外の点については線形に補間する．

この距離空間 (Ω, ρ) とゲージ関数 h が定理 2.1 を示すための所望のものである．それを以下の節で証明していこう．

2.3 標準的な集合と大きな集合

部分集合 $S \subseteq \Omega$ が,

$$S = \prod_{i \geqslant 1} H_i$$

の形をしていて，ある $j \geqslant 1$ について

- $i < j$ については H_i は G_i の一点部分集合
- H_j は G_j の非空部分集合
- $i > j$ について $H_i = G_i$

の形をしているとしよう．H_j が G_j の独立集合であるとき，S をランク j の標準的な集合と呼ぶことにし，$H_j = G_j$ のときは S をランク j の大きな集合と呼ぶことにする．

ランク j の大きな集合はランク $j-1$ の標準的な集合であることに注意したい．また，ランク j の標準的な集合は直径 2^{-j} を持つことがかんたんに分かる．

補題 2.4. Ω の部分集合 S が二点以上の点を持っているとき，同じ直径の標準的な集合で S を包むものが存在する．

2.4　全体集合の測度が大きいこと

補題 2.5. $\mathcal{H}^h(\Omega) = \infty$.

証明. $\mathcal{H}^h_{2^{-i}}(\Omega) \geqslant N_1 \dots N_{i-1}/n_1 \dots n_{i-1}$ を示せば十分である (注意 2.3 より). $\mathcal{V}$ を Ω の 2^{-i} 被覆とする.

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} h(\operatorname{diam}(V)) \geqslant N_1 \dots N_{i-1}/n_1 \dots n_{i-1}$$

を示さなければならない. $\mathcal{V}$ のどのメンバーも二点以上元を持つと仮定してよい. したがって, 補題 2.4 より, $\mathcal{V}$ のどの元も標準的な集合と仮定できる. Ω はコンパクトで, 標準的な集合はすべて開集合なので, $\mathcal{V}$ は有限個のメンバーからなると仮定できる. さらに重なる部分を削ることにより, 互いに重なりのない被覆だと仮定してよい.

まず, $\mathcal{V}$ に直径 2^{-i} より小さい標準的な集合 (つまりランクが $j > i$ な標準的な集合) がある場合を考えよう. このとき次を示す：別の Ω の被覆 $\mathcal{W}$ があって,

$$|\mathcal{W}| < |\mathcal{V}| \text{ かつ } \sum_{W \in \mathcal{W}} h(\operatorname{diam}(W)) < \sum_{V \in \mathcal{V}} h(\operatorname{diam}(V)) \qquad (*)$$

となる. ランクが $j > i$ な標準的な集合があるのでそれを一つ固定する. すると $W = \{x_0\} \times \{x_1\} \cdots \times H_j \times G_{j+1} \times G_{j+2} \times \dots$ と書ける (H_j は独立集合). $W' = \{x_0\} \times \{x_1\} \cdots \times G_j \times G_{j+1} \times G_{j+2} \times \dots$ とおくと W' はランク j の大きな集合である. W' はどの $V \in \mathcal{V}$ にも被覆されないことに注意しよう. そこで, 次が示された：ある大きな集合でランクが i より大きいものがあって, どの $V \in \mathcal{V}$ にも被覆されない. W_0 をこのような大きな集合の一つで, 極大なランク j を持つものとする. すると W_0 は $\mathcal{V}$ の中の標準的な集合たちで覆われる. それらを $W_1, \dots, W_k$ としよう. $W_1, \dots, W_k$ はどれもランク j の標準的な集合である. ランク $j-1$ 以下のものがあったとすると, その一つで W_0 を被覆することになり, それは W_0 の取り方に矛盾する. ランク $j+1$ 以上のものがあったとすると, それは W_0 に含まれているが, それは極大性に反する.

第 j 成分への射影 $\pi_j(W_1), \dots, \pi_j(W_k)$ を考えよう. これは G_j の独立集合による被覆である. したがって, 個数 k は n_j より大きい. したがって,

$$\sum_{l=1}^{k} h(\operatorname{diam}(W_l)) > n_j \cdot h(2^{-j}) = h(2^{-j+1}) = h(\operatorname{diam}(W_0)).$$

したがって, $\mathcal{W} = (\mathcal{V} \setminus \{W_1, \dots, W_k\}) \cup \{W_0\}$ は $(*)$ を満たす被覆となる.

以上より, $\mathcal{V}$ がランク i の標準的な集合のみからなるときを考えれば十分である. このとき各ランク i の大きな集合は $\mathcal{V}$ の中の n_i 個の元で覆われる. ランク i の大きな集合は $N_1 \dots N_{i-1}$ 個あるから,

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} h(\operatorname{diam}(V)) > n_i \cdot h(2^{-i}) \cdot N_1 \dots N_{i-1} = N_1 \dots N_{i-1}/n_1 \dots n_{i-1}$$

となり示したいことが示せた. □

2.5　測度正かつ有限の部分集合が存在しないこと

補題 2.6. Ω 上のどんな有限 Borel 測度 μ も $\mathcal{H}^f$ 測度 0 集合に集中する. すなわち, どんな有限 Borel 測度 μ についても Borel 集合 A があって $\mu(A) = \mu(\Omega)$ かつ $\mathcal{H}^h(A) = 0$ を満たす. 特に, $\mathcal{H}^f$ は Ω の部分集合で必ず 0 か ∞ の値を取る.

証明. どんな $\varepsilon > 0$ についても, Borel 集合 E があって, $\mu(E) < \varepsilon$ かつ $\mathcal{H}^h(\Omega \setminus E) < \varepsilon$ となることを示せば十分である.

さらに，これを示すためには，次を示せば十分である：どんな $\varepsilon > 0$ についても，Borel 集合 $E(\varepsilon)$ があって，$\mu(E(\varepsilon)) < \varepsilon$ かつ $\mathcal{H}_1^h(\Omega \setminus E(\varepsilon)) < \varepsilon$ となる．なぜなら，これを示せば，$E = \bigcup_{n=1}^\infty E(\varepsilon_n)$ where $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n = \varepsilon$ とおけばいいからである．(Hausdorff 測度とその δ 近似の差異は注意 1.6 と同様の議論で解消できる．)

さて，このような $E(\varepsilon)$ を構成しよう．Ω 上の有限 Borel 測度 μ と実数 $\eta > 0$ が与えられたとする．このときある i があって

$$N_1 \dots N_{i-1}/n_1 \dots n_i < \eta.$$

ランク i の大きな集合 V が与えられたとし，それをランク $i+1$ の大きな集合の和集合で $V = V^1 \cup V^2 \cup \cdots \cup V^N$ と書こう．射影 $\pi_i(V^s)$ は G_i の一点部分集合 $\{g^s\}$ である．補題 2.2 の (1) を $w(g) = \mu(V^s)$ という重み関数で適用すると，G_i の独立部分集合 H が存在し，

$$\mu\left(\bigcup\{V^s : g^s \in H\}\right) \geqslant \frac{1}{4}\mu(V)$$

となる．$W := \bigcup\{V^s : g^s \in H\}$ はランク i の標準的な集合である．したがって，

$$\mathcal{H}_1^h(W) \leqslant h(2^{-i}) = 1/n_1 \dots n_i$$

となる．

さて，これと同じ構成を $N_1 \dots N_{i-1}$ 個あるすべての大きな集合に対して行おう．対応する集合 W たちを全部和集合したものを F_1 と書く．すると

$$\mu(F_1) \geqslant \frac{1}{4}\mu(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F_1) < \eta$$

である．

同じ結果を今度は Borel 測度 μ_1 で $\mu_1(X) = \mu(X \setminus F_1)$ で定義されるものについて適用すると Borel 集合 F_2 がとれて，

$$\mu_1(F_2) \geqslant \frac{1}{4}\mu_1(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F_2) < \eta$$

となる．$F_2' = F_1 \cup F_2$ とおくと，

$$\mu(F_2') \geqslant \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\mu(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F_2') < 2\eta$$

となる．この操作を繰り返すと各 k について，Borel 集合 F_k' で

$$\mu(F_k') \geqslant \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)\mu(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F_k') < k\eta$$

となるものを取ることができる．k を十分大きく取り，その後で η を十分小さく取ることで，$E(\varepsilon) = \Omega \setminus F_k'$ は $\mu(E(\varepsilon)) < \varepsilon$ かつ $\mathcal{H}_1^h(\Omega \setminus E(\varepsilon)) < \varepsilon$ を満たす．これで証明された． $\square$

参考文献

[DR69] R. O. Davies and C. A. Rogers. "The Problem of Subsets of Finite Positive Measure". *Bulletin of the London Mathematical Society* 1.1 (Mar. 1969), pp. 47–54.

[Fre00] D.H. Fremlin. *Measure Theory*. 2000.

[How95] J. D. Howroyd. "On dimension and on the existence of sets of finite positive Hausdorff measure". *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.3 (1995), pp. 581–604.